Anneaux

* 1. Généralités
     1. Définition

Soit *A* un ensemble muni de deux lois notées + et .

On dit que  est un anneaux lorsque :

 est un groupe commutatif.

 est associative et distributive sur +

* Il y a dans *A* un élément neutre pour 

Si de plus  est commutative, on dit que  est un anneau commutatif.

Remarque, notations :

D’après les résultats généraux sur les lois de composition interne, si  est un anneau, il ne possède qu’un seul élément neutre pour +, il est noté  et est appelé le zéro de *A*, et il ne possède qu’un seul élément neutre pour , il est noté  et est appelé l’élément unité de *A*.

A moins que l’anneau *A* ne soit réduit au singleton , on a .

En effet, si on a  alors, pour tout , on a :



De  on tire, selon la règle de régularité des éléments du groupe , que .

* + 1. Règles de calcul

Soit  un anneau, et *a*, *b*, *c*, *d* des éléments quelconques de *A*. On a :

 (on dit que  est absorbant)

En effet, .

D’où, par régularité des éléments dans le groupe , .

De même de l’autre côté.



En effet :



D’où . De même pour l’autre égalité.

* Développement des produits de sommes

 (attention à l’ordre dans les produits)

Immédiat en appliquant deux fois la distributivité.

* Pour , on définit  par  et .

Alors  (immédiat par associativité de ).

Et 

(mais attention : ,  n’est pas nécessairement commutative)

* Dans le groupe , on a toujours la définition et les propriétés pour  (), et de plus :  (qu’on peu noter )

En effet, pour , on le montre aisément par récurrence, en utilisant la distributivité de  sur +, puis pour  avec , on a :

 d’après les règles précédentes.

D’où  selon la règle .

* + 1. Deux identités remarquables

Dans tout anneau , *a* et *b* étant deux éléments de *A* **qui commutent**, on a, pour tout  :

 (formule du binôme)

 (avec )

Démonstration :

- Pour la formule du binôme, on peut reprendre la démonstration faite dans l’anneau , étant donné qu’elle n’utilise que les règles de calculs dans un anneau et le fait que *a* et *b* commutent.

- Pour la seconde :



* + 1. Exemples d’anneaux

, , ,  pour les lois usuelles sont des anneaux.

*E* étant un ensemble, et  un anneau, en définissant les lois + et  sur  par :

Pour , , , on vérifie immédiatement que  est un anneau, commutatif si *A* l’est.

En particulier :

- En prenant pour  l’anneau , et en prenant toujours *E* un ensemble quelconque :

, muni des lois « naturelles » + et  d’addition et de multiplication de fonctions est un anneau commutatif.

Et si on prend , on obtient :

, c'est-à-dire l’ensemble des suites réelles indexées par N (noté aussi ), muni des lois naturelles d’addition et de multiplication de suites, est un anneau commutatif.

- Et de même en prenant pour  l’anneau ,  est un anneau commutatif, et en particulier  est un anneau commutatif.

* 1. Sous anneaux

Définition :

Soit  un anneau, et soit *B* une partie de *A*.

On dit que *B* est un sous anneau de *A* lorsque :

* *B* est stable par + et .



Proposition :

Soit  un anneau, et soit *B* une partie de *A*. Si *B* est un sous anneau de , alors + et  constituent des lois de composition internes sur *B*, et  est un anneau, commutatif si *A* l’est.

Exemples :

* Z, Q, R sont des sous anneaux de .
* L’ensemble des suites réelles convergentes (et indexées par N) constitue un sous anneau de .
  1. Morphismes d’anneaux

Définition :

Soient  et  deux anneaux.

Un morphisme d’anneaux de *A* vers *B* est une application  telle que :



Remarque :

Un morphisme d’anneau  de  vers  est en particulier un morphisme de groupes de  vers , on a donc nécessairement .

En revanche, la condition (3) ne doit pas être oubliée car elle ne résulte pas de (1) et (2).

Exemple :

L’application  constitue un morphisme de l’anneau des suites réelles convergentes indexées par N, muni des lois naturelles + et  vers l’anneau .

Définition :

De même que dans les groupes, on définit pour un morphisme  de  vers  l’image de  par  et le noyau de  par  (c’est le noyau du morphisme de groupes correspondant)

Ici encore,  et  sont des sous anneaux respectivement de  et  (la démonstration est quasiment la même que pour les groupes)

Proposition :

Si  est un morphisme d’anneaux de  vers , et si  est un sous anneau de *A*, alors  est un sous anneau de *B*.

Démonstration :

Evident en considérant 

Proposition, définition :

Si  est un morphisme d’anneaux de  vers , et si  est bijectif, alors  est un morphisme d’anneaux bijectif de  vers . On dit alors que  est un isomorphisme d’anneaux.

Démonstration :

Se baser toujours sur les morphismes de groupes.

* 1. Compléments
     1. Eléments inversibles

Définition :

Soit *A* un anneau non réduit à .

Un élément *x* de *A* est inversible lorsqu’il existe  tel que .

Proposition, définition :

Si *x* est inversible, alors il existe un unique  tel que . On l’appelle l’inverse de *x*, et on le note .

Proposition :

L’ensemble  des éléments inversibles de *A* forme un groupe pour .

Démonstration :

- Pour tous , . En effet :

, donc  et 

-  est associative.

-  et est neutre pour 

- Si , alors évidemment  et est symétrique de *x* pour .

* + 1. Anneau intègre

Soit  un anneau quelconque.

Il est faux en général que, pour  :

.

Un élément *a* tel qu’il existe  de sorte que  s’appelle un diviseur de  ( est donc un diviseur de , puisque on a même pour tout , )

Définition :

Soit  un anneau. On dit que *A* est intègre lorsque :

1. *A* n’est pas réduit à .
2. *A* est commutatif.
3. *A* n’admet pas de diviseur de  autre que , c'est-à-dire :

.

Exemples :

Z est intègre.

 ne l’est pas.

Attention :

Dans un anneau où il y a des diviseurs de  autres que  (c'est-à-dire non intègre), les éléments non nuls de *A* ne sont pas toujours réguliers pour *x*:

En effet :



Ce qui peut arriver même si  et .