**Arithmétique dans l’ensemble des naturels**

1. ***Multiples et diviseurs***

Le naturel ***a*** est multiple du naturel ***b***, cela signifie qu’il y a un naturel ***k*** tel que ***a*** = ***b*** x ***k***

Si les naturels ***a*** et ***b*** sont multiples de ***c***, alors ***a*** + ***b*** est aussi multiple de ***c***

Si ***a*** est multiple de ***b*** et ***b*** est multiple de ***c***, alors ***a*** est multiple de ***c***

Le naturel ***a*** est un diviseur du naturel ***b***, cela signifie qu’il y a un naturel ***k*** tel que ***b*** = ***a*** x ***k***

Si le naturel ***c*** est un diviseur des naturels ***a*** et ***b***, alors il est aussi diviseur de ***a*** + ***b***

Si ***a*** est diviseur de ***b*** et si ***b*** est diviseur de ***c***, alors ***a*** est diviseur de ***c***

On parle de ***division euclidienne*** lorsqu’il y a un reste.

Si ***a*** est un entier naturel, ***b*** est un entier naturel non nul, il existe deux réels uniques ***q*** et ***r*** tels que ***a*** = ***bq*** + ***r*** et ***r*** < ***b***

On nommera ***q*** le quotient euclidien de ***a*** par ***b*** et ***r*** le reste de ***a*** par ***b***

Un nombre est ***premier*** s’il n’a que deux diviseurs, 1 et lui-même (ex : 2,3,5,7,11…).

La décomposition d’un naturel en ***produits de facteurs premiers*** : il faut diviser un nombre par les nombres premiers successifs : 882 / 2

441 / 3

147 / 3

49 / 7

7 / 7

1. 🡪 donc pour 882 = 2 x 3² x 7²

Le plus grand commun diviseur est le ***pgcd***.

Plutôt que des lister tous les diviseurs de manière fastidieuse, on peut se servir du résultat de la décomposition en produits de facteurs premiers, il suffit de prendre en compte de prendre les produits figurant ***dans les deux opérations*** affectés du ***plus petit des exposants***.

Exemple : 24 = 23 x 3 et 36 = 2² x 3² donc ici le cas commun est : 2² x 3 = 12

Le plus petit multiplicateur est le ***ppcm***.

De la même manière, plutôt que de lister les multiplicateurs, on peut se servir du résultat de la décomposition en produits de facteurs premiers, il faut cette fois prendre en compte les produits figurant dans ***l’une ou l’autre*** des deux opérations affectés de ***l’exposant le plus grand*** avec lequel il figure dans l’une des deux décompositions.

Exemple : 24 = 23 x 3 et 36 = 2² x 3² donc ici le cas commun est : 23 x 3² = 72

Les ***critères de divisibilité*** varient selon les nombres :

* par ***2*** si le chiffre des unités est pair
* par ***3*** si la somme des chiffres est divisible par 3
* par ***4*** si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
* par ***5*** si le chiffre des unités est 0 ou 5
* par ***9*** si la somme des chiffres est divisible par 9
* par ***10*** si le chiffre des unités est 0

1. ***Parmi les questions classiques sur le sujet***

Trouver un naturel qui soit multiple de 5 sans être multiple de 10.

🡪 Tout les nombres se terminant par 5 (5, 15, 25…)

Trouver un naturel qui soit multiple de 10 sans être multiple de 5.

🡪 Tout multiple de 10 est aussi multiple de 5 (car 10 est multiple de 5).

Pourquoi est on sûr que 282.828 est un multiple de 7 (sans poser d’opération) ?

🡪 Comme 282.828 = (28 x 10.000) + (28 x 100) + 28 = 28 (10.000 + 100 + 1), alors la réponse est oui car le chiffre est un multiple de 28, donc de 7.

Retrouver les chiffres manquants ***a*** et *b* dans le nombre 37***a***28***b*** pour qu’il soit divisible à la fois par 6 et par 45.

🡪 Le nombre doit être divisible par 2 et 3 (car par 6) et par 5 et 9 (car par 45).

Divisible par 5, il se termine par 0 ou 5. Divisible par 2, il se termine donc par 0, donc ***b*** = 0

Divisible par 9, il faut que 3 + 7 + ***a*** + 2 + 8 + 0, soit 20 + a soit divisible par 9, d’où ***a*** = 7.

Le nombre est donc 377.280

Un nombre A s’écrit avec 3 chiffres. En permutant ses chiffres des dizaines et des unités, on obtient un nombre B. En permutant ceux des dizaines et des centaines de A, on obtient un nombre C. En permutant ceux des unités et des centaines de A, on obtient un nombre D.

On sait que A – B = 18 et que C – A = 360.

1- Trouver D - A

2- Montrer que A est multiple de 3

3- Trouver A sachant qu’il est multiple de 9

🡪 A = CDU = 100C + 10D + U

B = CUD = 100C + 10U + D

C = DCU = 100D + 10C + U

D = UDC = 100 U + 10D + C

A – B = 9D – 9U = 9(U-D) = 18 donc D – U = 2 soit U = D - 2

C – A = 90D – 90C = 90(D – C) = 360 donc D – C = 4 soit C = D - 4

D – A = 99U – 99C = 99(U – C), comme U – C = (D – 2) – (D – 4) = 2, alors D – A = 198

🡪 A = 100(D – 4) + 10D + D – 2 = 111D – 402 = 3 x (37D – 134).

🡪 Il faut que 37D – 134 soit multiple de 3, donc seuls D = 5 et D = 8 peuvent aller.

Si D = 5, alors A = 153 et si D = 8, alors A = 486

Un producteur récolte 1800 oignons de tulipes jaunes et 840 oignons de tulipes noires. Ils veut tout vendre dans des sachets ayant la même composition. Quel est le nombre max de sachets ?

🡪 Il faut trouver le PGCD de 1800 et 840, soit 120.

1. ***Multiplication et division***

Le produit de ***a*** par ***b*** est égal à la somme de ***b*** naturels étaux à ***a*** (***a*** x ***b*** = ***a*** + ***a*** + ***a*** + … + ***a***) avec ***b*** termes.

La multiplication est ***distributive*** : ***a*** x (***b*** + ***c***) = (***a*** x ***b***) + (***a*** x ***c***).

La multiplication est ***associative*** : ***a*** x (***b*** x ***c***) = (***a*** x ***b***) x ***c***.

La multiplication est ***commutative*** : ***a*** x ***b*** = ***b*** x ***a***.

La ***division*** ***euclidienne*** de deux naturels ***a*** et ***b*** (avec ***b*** différent de 0) est l’opération par laquelle on associe à ***a*** et ***b***, les naturels ***q*** et ***r*** tels que ***a*** = (***b*** x ***q***) + ***r*** (avec ***r*** < ***b***).

On a ***a*** qui est le dividende, ***b*** qui est le diviseur, ***q*** qui est le quotient et ***r*** qui est le reste.

La division de ***a*** et ***b*** (avec ***b*** différent de 0) consiste à rechercher la solution de l’équation : ***a*** = ***b*** x ***x***, où ***x*** est appelé quotient de ***a*** par ***b***. Il y a toujours une solution unique.

1. ***Additions et soustractions***

On distingue le ***calcul automatisé*** (un résultat déjà mémorisé par exemple) du ***calcul réfléchi*** (procédure spécifique et personnelle à élaborer). Ex : 43 + 19 peut se faire avec 40 + 10 + 3 + 9 ou bien 43 + 20 – 1.

Ex : 23 x 4 peut se faire avec (20 x 4) + (3 x 4) ou alors 25 x 4 (résultat connu de 100) puis on enlève 8.

Dans tous les cas, il faut connaître des résultats mémorisés comme les tables de multiplications et les « comptes ronds ».

L’usage de la calculatrice, instrument banalisé, est une variable didactique clé (elle apporte un « souffle » au calcul et permet à l’élève de se concentrer sur la résolution du problème en lui-même).

L***’addition*** donne une ***somme*** de 2 naturels ***a*** et ***b***.

La ***soustraction*** donne une ***différence*** de 2 naturels ***a*** et ***b***.

L’addition est ***associative*** : on peut déplacer les parenthèses : (a + b) + c = a + (b + c).

L’addition est ***commutative*** : on peut permuter les termes : a + b = b + a

1. ***Aspects didactiques***

Divers types de problèmes et donc différents classements coexistent :

- Ceux qui se résolvent avec une addition ou ceux avec une soustraction.

- Ceux fondés sur ce que représentent les nombres (quantités, position sur une graduation…).

- Ceux fondés sur l’évocation du problème (changements, comparaisons, constats…).

Les techniques de résolution sont diverses pour l’élève :

* procédure de représentation de la réalité (faire des croix, des paquets…)
* procédure de surcomptage et décomptage
* procédure basée sur la reconnaissance du calcul préalable à effectuer

Au sujet des risques et erreurs, les grands nombre nuisent au dessin et au surcomptage/décomptage, de même, les surcomptage/décomptage voient un risque d’erreur à 1 près (compté en trop). Les mots peuvent influencer aussi (« Machin a 10 billes de plus que… », «  a gagné … » alors qu’il s’agit d’une soustraction).

Sur la technique opératoire, il peut y avoir des problèmes de retenues (oubli ou systématisation), de placement des ordres d’unités, de gestion du « 0 » parfois considéré comme le dernier chiffre existant (les négatifs ne sont pas connus).

Les problèmes sont de divers types :

* composition d’un état (des tulipes et des roses dans un bouquet)
* transformation d’un état (gain/perte de billes, avancer ou reculer sur un jeu de l’oie)
* comparaison d’états (2 prix pour un produit, comparer des collections)
* composition de transformations (gain/perte de billes en 2 temps = calcul intermédiaire)

Les variables didactiques peuvent tenir à la taille des nombres et à leur taille relative (« x » et « y » étant grands, petits et/ou très voisins), à la configuration des nombres (ronds ou pas, résultats connus de tables) et à la possibilité d’utiliser ou non la calculatrice.

La situation classique d’un achat à l’unité peut prendre différentes formes (la méthode est toujours le produit en croix):

* multiplication : quel est le prix de 15 objets valant 7 F l’un ?
* division : le prix d’un objet si on a payé 105 F pour les 15 ?
* proportionnalité : le prix de 15 objets valant 35 F les 3 ?

Parmi les techniques de résolution pour la ***multiplication*** :

* avec 2 petits chiffres : dessin, calcul mental via les tables, mise en addition
* avec 1 chiffre petit et 1 chiffre grand : mise en addition, calculatrice
* avec 2 grands chiffres : la multiplication devient réellement efficace, le dessin sous forme d’arbre peut marcher aussi.

Pour la ***division*** : dessin, addition/soustraction pas à pas (tâtonnement), essais de multiples successifs du diviseur (tâtonnement), quotients partiels au hasard.

Difficultés dans la technique opératoire de la multiplication : méconnaissance des tables, mauvaise gestion du zéro (décalage dans le positionnement des chiffres), retenues, ordre des calculs.

Pour la technique opératoire de la division : tous les types d’opération sont représentés (difficile), présence de chiffres intermédiaires.

# Ensemble de nombres

1. ***Théorie***

L’idée est qu’il existe des ensembles de nombres qui s’emboîtent entre eux.

***N*** désigne les ***entiers naturels*** (0, 1, 2, n, n +1..). Ils sont infinis (il y a toujours un successeur)

Chaque élément y a un successeur unique.

Deux éléments ont des successeurs différents.

Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.

Zéro n’est le successeur d’aucun nombre.

L’addition et la multiplication y sont associatives, commutatives et régulières (si un des entiers est différent de 0 pour la multiplication).

Il y a cependant des insuffisances (la soustraction n’est pas toujours possible 🡪 cas des nombres négatifs…).

***Z*** désigne les ***entiers relatifs*** (-n, -2, -1, 0, 1, 2, n, n + 1…). Il s’agit des naturels et de leurs opposés.

Zéro est à la fois positif et négatif.

L’addition est commutative et associative et possède 0 comme élément neutre (x + x’ = 0).

La multiplication respecte la règle des signes (positif x positif = positif, négatif x négatif = négatif, positif x négatif = négatif).

Il y a cependant des insuffisances (un quotient n’est pas toujours un entier relatif et les entiers relatifs n’ont pas d’inverse pour la multiplication).

***Q*** désigne les ***rationnels*** (-3/4, ¾, 0, -1, 8, 0,125…). On l’écrit sous la forme d’une fraction notée a/b (avec b différent de 0).

On peut tenter de rendre la fraction sous une forme irréductible. La décomposition en facteurs premiers peut faciliter ces simplifications.

Il y a cependant des insuffisances (la mesure d’une longueur à l’aide d’une autre fait appel parfois à une racine carrée).

***D*** désigne les ***décimaux***

Un entier peut être rationnel si on l’écrit a/1 (4/10 est un décimal car on peut l’écrire 0,4🡪 c’est un quotient d’une puissance de 10).

Cependant, tous les nombre à virgule ne sont pas des décimaux (6/7 qui donne 0,857142…il y a une répétition de la suite après la virgule donc il s’agit d’un nombre périodique).

***R*** désigne les ***réels***

Il s’agit du reste (Pi, les racines carrées…). Il y a, dans cet ensemble, des irrationnels (nombre à partie décimale illimitée et non périodique).

🡪 ***N*** C ***Z*** C ***D*** C ***Q*** C ***R***

On peut encadrer au dixième (1,66 < 5/3 < 1,67), au centième (1,666 < 5/3 < 1,667)…

On peut arrondir (1,67 est l’arrondi de 5/3). On le fait par défaut ou par excès.

Identités remarquables : (a+b)² = a² + b² + 2ab --- (a-b)² = a² + b² - 2ab --- (a+b)(a-b)= a² - b²

Puissances : an = a x a x a … a1= 0, a0= 1 (si a différent de 0), a-n = 1/an, an x ap = an+p, (an)p = an x p, an xbn = (a x b)n

(n + 1)² - n² = (n + 1) + n

1. ***Exercices, compléments***

Trouver une fraction s’intercalant entre 15/21 et 16/21 : il y a une infinité, par exemple (15/21 + 16/21) / 2 = 32/42.

La somme de 2 fractions non décimales peut être décimale : 1/3 + 2/3 = 1.

Les comparaisons de décimaux : 8,75 > 8,625 (le nombre plus élevé de décimales ne signifie pourtant pas que le nombre est plus élevé). De même, niveau densité, on peut toujours mettre un décimal entre deux décimaux : entre 0,429 et 0,43 on peut mettre 0,4291.

Une écriture décimale ne signifie pas forcément nombre décimal : des écritures décimales pour un entier (3,00), un décimal (3,25), un rationnel non décimal (0,333…avec une infinité de 3 donc égal à 1/3), un irrationnel (V2).

L’entier qui suit 54 est 55.

L’entier qui suit 23,5 est 24.

Le décimal qui suit 32,13 n’existe pas pour ainsi dire, il y en a une infinité.

1. ***Didactique***

Sur des rangements de nombres à virgule, les élèves peuvent se tromper sur divers points :

* ranger les nombres en fonction de leur nombre de chiffres sans tenir compte de la virgule
* inverser croissant et décroissant
* considérer la partie décimale comme un entier
* ne pas considérer le ou les 1ers zéros après la virgule
* additionner ou multiplier les parties entières ensemble et les parties décimales ensemble (3,7 + 5,8 qui donnerait 8,15 ou encore 3,7 x 5,8 qui donnerait 15,56).

On peut utiliser les décimaux dans les mesures (à l’aide d’une bande unité). Cela constitue une variable didactique (la longueur à mesurer donne-t-elle un entier ou une fraction) tout comme la taille du « reste » (est-il négligeable ou non ?).

# Les entiers naturels

1. ***Théorie***

Il faut savoir que notre système décimal est un ***système de position*** (la valeur d’un chiffre dépend de sa position), que l’on groupe les unités inférieures pour les échanger contre des unités supérieures, est que le groupement est ***régulier*** (un groupement contient toujours le même nombre d’éléments à échanger). La valeur de l’échange s’appelle la ***base***. On raisonne en base 10 mais il peut en être autrement.

Il faut 10 signes marquant les chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) dont l’un représente l’absence.

Les grandes valeurs (puissances de dix) se nomment dix, cent, mille, million etc…

Certains termes sont même illogiques (onze, douze, treize…) alors qu’on pourrait utiliser dix-un, dix-deux, dix-trois…

L’exercice classique est celui du changement de base. Il faut prendre en compte que dans une base 5, par exemple, les chiffres existant sont 0,1,2,3,4.

Quel est le plus grand nombre de 3 chiffres que l’on peut écrire en base 5 ? C’est 444.

1. ***Didactique***

Exercice visant à habiller des poupées avec des vêtements qui sont éloignés. On demande de ramener juste assez de robe. On cherche là à mesurer le recours spontané au dénombrement (en prendre « assez » ne veut pas dire « juste assez »), de plus l’éloignement des robes, variable didactique, oblige à ne pas utiliser une correspondance terme à terme.

L’enfant sait compter s’il sait dénombrer (faire une collection de référence = compter les élèves), mémoriser le dernier nombre prononcé, construire une collection équipotente à la collection de référence (prendre le même nombre de feutres que d’élèves).

L’enfant peut procéder de diverses façons :

* Opter pour la correspondance terme à terme (intéressant avec de petits nombres). Le fait que les éléments à dénombrer soient proches ou non, manipulables ou non, sont des variables didactiques.
* Opter pour une correspondance par paquets (sous-collections, pratique avec de plus grands nombres)
* Opter pour une estimation (les enfants l’utilise peu par peur de se tromper)
* Opter pour le dénombrement
* Opter pour d’autres techniques comme le surcomptage, décomptage (risque d’erreur de +/- 1).
* Opter pour des procédures de calcul (décomposition de nombres : 67 + 28 = 60 + 7 + 20 + 8).

Il faut donner du sens aux écritures chiffrées :

Dans 387, le chiffre des dizaines est 8 mais le nombre de dizaines est 38.

C’est à dire qu’il faut retenir les équivalences : 1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines, 1 centaine = 100 unités.

# Equations et inéquations

La mise en équation d’un problème se fait en 4 temps :

* dégager une inconnue (qui n’est pas forcément celle suggérée par l’énoncé)
* traduire les informations par des égalités ou inégalités
* résoudre l’équation ou l’inéquation ou le système
* retraduire le résultat dans le langage de la situation en en vérifiant la pertinence

1. ***Equation ou inéquation du 1er degré à une inconnue :***

Elle est de type : ax = b ; la solution est x = b/a (mais si a et b = 0, alors tout réel est solution mais si a = 0 mais pas b alors, il n’y a pas de solution).

Pour une inéquation, la forme est ax < b ou alors ax > b.

Pour la résolution, on peut obtenir une (in)équation équivalente à une (in)équation donnée :

* en ajoutant (ou retranchant) aux 2 membres de cette dernière une même expression algébrique.
* en multipliant (ou en divisant) ses 2 membres par une même expression algébrique non nulle.

*Exemples* :

4 (2 + x) = 7 – 2x

8 + 4x = 7 – 2x

6x = -1

x = -1/6

(6x – 12) (x + 3) = 0

Si un des facteurs est nul, l’équation est nulle, donc les solutions sont x = 2 et x = - 3

3x – 6 < 7x + 2

8 – 4x < 0

8 > - 4x

x > -2

Les réels strictement supérieurs à – 2 sont solutions de l’équation initiale.

1. ***Système d’équations ou inéquations à deux inconnues***

Il y a la méthode par ***substitution*** : on obtient un système équivalent à un système donné en substituant à une inconnue, dans l’une des (in)équations, sa valeur tirée de l’autre (in)équation (valeur exprimée en fonction de la 2ème inconnue).

Il y a la méthode par ***combinaison*** : on obtient un système équivalent à un système donné en remplaçant l’une des (in)équations par une combinaison linéaire des 2 (in)équations du système.

La méthode ***graphique*** donne comme solution le point d’intersection des 2 droites.

1. ***Parmi les questions classiques sur le sujet***

*Ex 1 : un système de 2 équations à 2 inconnues :*

J’ai posté 34 lettres, certaines affranchies à 2,50 F et les autres à 4 F. J’en ai eu pour 116,5 F.

On pose : x + y = 34

2,50x + 4y = 116,50 🡪 d’où, x = 13 et y = 21

Cette méthode de mise en équation est la plus performante mais pas nécessairement la plus simple à généraliser pour l’élève.

Il peut s’y prendre par essais successifs de couples de solutions (0, 34), (1, 33)… (34, 0) mais cela est long et fastidieux et sera géant avec des grands nombres.

*Ex 2 : un système de 2 inéquations à 2 inconnues :*

J’ai acheté 5 kgs de fruits, des pommes et des poires et j’ai payé moins de 50 F.

Les pommes valent 8 F/kg et les poires 11 F/kg

On pose : x + y = 5

8x + 11 y < 50 🡪 d’où x = 5/3 et y = 10/3

*Ex 3 : les formules d’abonnement :*

On a le choix entre 2 formules :

A : 120 F d’abonnement et 20 F par location et B : pas d’abonnement et 30 F par location

La encore, la mise en équation est plus rentable que l’examen systématique des solutions.

A : 20 x + 120

B : 30 x

La formule B est moins chère si 30 x < 20 x + 120 🡪 d’où x < 12, la formule B plus avantageuse si on loue moins de 12 cassettes.

*Divers :*

Un groupe de 13 personnes et un groupes de 13 personnes vont au restaurant. Le groupe de 31 personnes paye 756 F de plus que l’autre. Quel est le prix du menu ?

31x = 13x + 756 🡪 d’ou x = 42.

La somme de 4 entiers consécutifs vaut 238, quels sont ces nombres ?

Il faut faire : n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 238 🡪 4n + 6 = 238, d’ou n = 58.

Trois petits verres P remplissent un verre V. Il faut 8 verres V et un petit verre P pour remplir une bouteille d’un litre. Quelle est la contenance de P et V ?

8V + P = 100 🡪 24P + P = 100 🡪 25 P = 100 🡪 P = 4 et donc V = 12

Trouvez un naturel de 3 chiffres tel que : la somme des chiffres soit 24, la naturel diminue de 9 si on permute les 2 derniers chiffres, il diminue de 90 si on permute les 2 premiers chiffres.

CDU = 100C + 10D + U

En permutant les 2 derniers chiffres, on a CUD = 100C + 10U + D

En permutant les 2 premiers chiffres, on a DCU = 100 D + 10C + U

C + D + U = 24

100C + 10D + U – (100C + 10U + D) = 9

100C + 10D + U – (100 D + 10C + U) = 90

C + D + U = 24

9D – 9U = 9

90C – 90D = 90

C + D + U = 24

D – U = 1 🡪 d’ou: U = D -1

C – D = 1 🡪 d’ou: C = D + 1

Et donc on peut tout avoir en fonction de D et en déduire sa valeur : D = 8 et donc U = 7 et C = 9, le nombre est donc : 987