Cercles et sphères

* 1. Le cercle dans le plan

P désigne ici un plan affine euclidien.

* + 1. Définition

Soit  un point de P et *R* un réel positif.

Définition :

Le cercle de centre  et de rayon *R* est l’ensemble des points *M* de P tels que  (il est réduit à  lorsque )

On appelle diamètre d’un cercle tout segment joignant deux points de ce cercle et passant par son centre.

* + 1. Cercle circonscrit à un triangle

Théorème :

Par trois points non alignés *A*, *B* et *C* de P passe un et un seul cercle.

Démonstration :

Les médiatrices  et  des segments  et  sont sécantes (elles ne sont pas parallèles car leurs vecteurs normaux  et  sont non colinéaires), et si  désigne leur point d’intersection, alors on a  et , d’où  (donc  est aussi sur la troisième médiatrice).

Il est alors clair que le cercle de centre  et de rayon  est un cercle qui passe par *A*, *B*, *C* et que c’est le seul (car le centre d’un cercle passant par *A*, *B*, *C* appartient aux trois médiatrices de )

Remarque :

Le théorème équivaut à dire que les trois médiatrices du triangle  sont concourantes, ce qui ressort de la démonstration.

* + 1. Une caractérisation

Proposition :

Soient *A*, *B* deux points de P. L’ensemble des points *M* de P tels que  est orthogonal à  est un cercle de diamètre .

Démonstration :

Soit *I* le milieu de . Alors :



Donc 

* + 1. Equation cartésienne

Soit R un repère orthonormé du plan P.

Un point  appartient au cercle *C* de centre  et de rayon *R* si et seulement si .

Par conséquent, tout cercle admet dans un repère orthonormé une équation du type . Inversement, une équation de ce type se met sous la forme , donc est l’équation, dans R, d’un cercle de centre  et de rayon  si , et de l’ensemble vide sinon.

* + 1. Intersection d’un cercle et d’une droite

Soit *C* un cercle de centre  et de rayon *R*, et soit D une droite.

Soit *H* la projection de  sur D, notons  (distance de  à D)

Pour tout *M* de D, on a : 

Donc 

* Si ,  est vide.
* Si ,  est réduit à *H*.
* Si ,  est formé des deux points de D qui sont situés à  de *H*.

Dans le cas où  est réduit à un point, on dit que D est tangente à *C*.

Remarque :

Si, dans un repère orthonormé, D a pour équation :  et *C* a pour équation , alors 

* + 1. Tangente

Soit *C* un cercle de centre , et soit  un point de *C*. Il résulte de ce qui précède que la tangente à *C* passant par  est la droite passant par  et orthogonale à .

Si, dans un repère orthonormé, *C* a pour équation , et  a pour coordonnées , une équation de cette tangente est alors .

* 1. La sphère dans l’espace

 désigne ici un espace affine euclidien de dimension 3.

* + 1. Définition

Soit  un point de  et *R* un réel positif.

Définition :

La sphère de centre  et de rayon *R* est l’ensemble des points *M* de  tels que  (elle est réduite à  lorsque )

On appelle diamètre d’une sphère tout segment joignant deux points de cette sphère et passant par son centre.

* + 1. Sphère circonscrite à un tétraèdre

Théorème :

Par quatre points non coplanaires *A*, *B*, *C* et *D* de  passe une et une seule sphère.

Démonstration :

Les plans médiateurs ,  et  des segments ,  et  sont sécants en un point  : en effet, les vecteurs normaux ,  et  forment une famille de rang 3 (puisque *A*, *B*, *C* et *D* ne sont pas coplanaires) donc le système formé des trois équations des plans (en repère orthonormé) est de Cramer. Si  désigne le point d’intersection de ,  et , alors on a ,  et ,  (donc  est aussi sur les autres plans médiateurs).

Il est alors clair que la sphère de centre  et de rayon  est une sphère qui passe par *A*, *B*, *C* et *D* et que c’est la seule (car le centre d’une sphère passant par *A*, *B*, *C*, *D* appartient à tous les plans médiateurs)

Remarque :

Le théorème équivaut à dire que les six plans médiateurs se rencontrent en un même point, ce qui ressort de la démonstration.

* + 1. Une caractérisation

Proposition :

Soient *A*, *B* deux points de . L’ensemble des points *M* de  tels que  est orthogonal à  est une sphère de diamètre .

Démonstration :

Soit *I* le milieu de . Alors :



Donc 

* + 1. Equation cartésienne

Soit R un repère orthonormé de .

Un point  appartient au cercle *C* de centre  et de rayon *R* si et seulement si .

Par conséquent, toute sphère admet dans un repère orthonormé une équation du type . Inversement, une équation de ce type se met sous la forme , donc est l’équation, dans R, d’une sphère de centre  et de rayon  si , et de l’ensemble vide sinon.

* + 1. Intersection d’une sphère et d’un plan

Soit *S* une sphère de centre  et de rayon *R*, et soit P un plan.

Soit *H* la projection de  sur P, notons  (distance de  à P)

Pour tout *M* de P, on a : 

Donc 

* Si ,  est vide.
* Si ,  est réduit à *H*.
* Si ,  est le cercle, tracé sur P, de centre *H* et de rayon .

Dans le cas où  est réduit à un point, on dit que P est tangent à *S*.

Remarque :

Si, dans un repère orthonormé, P a pour équation :  et *S* a pour équation , alors 

* + 1. Tangente

Soit *S* une sphère de centre , et soit  un point de *S*. Il résulte de ce qui précède que le plan tangent à *S* passant par  est le plan passant par  et orthogonal à .

Si, dans un repère orthonormé, la sphère *S* a pour équation :

, et  a pour coordonnées , une équation de cette tangente est alors :

.

On peut généraliser ces notions de cercles et sphères à des espaces affines de dimensions quelconques, on parle alors d’hypersphères en dimension *n*.