Champs de vecteurs sur R3

Définition, rappels :

Soit  un ouvert de .

Un champ de vecteurs sur  est une application de  dans .

C’est donc une application  où *X*, *Y*, *Z* (applications coordonnées) sont des applications de  dans R.

On dira que  est de classe  lorsque chaque application coordonnée est de classe .

Si  est de classe  (), on définit :

, et de même pour les dérivées partielles par rapport à *y* et *z*, et pour les dérivées partielles d’ordre supérieur.

On conserve les notations dans la suite du chapitre.

* 1. Divergence d’un champ de classe .

Si  est un champ de classe , et si , on appelle divergence de  en *M*, et on note  le réel défini par :



Et on note aussi  l’application de  dans R qui à *M* associe .

* 1. Rotationnel d’un champ de classe .

Soit  un champ de classe , et soit .

Le rotationnel de  en *M*, noté , est l’unique vecteur de  tel que :

,  étant muni de sa structure euclidienne naturelle.

Cette définition a bien un sens, puisqu’on vérifie immédiatement que l’application  est une forme linéaire sur .

Expression du rotationnel :

Posons .

Alors .

Donc



Donc 

On note  l’application de  dans R qui à *M* associe .

* 1. Expressions symboliques

Si on note  (Nabla) le « vecteur » , on a symboliquement :

 et 

Et aussi, si  est de classe , on a, toujours symboliquement : .

* 1. Potentiels scalaires

Soit  un champ de vecteurs sur , et soit  de classe .

On dit que  dérive du potentiel scalaire *f*, ou encore que *f* est un potentiel scalaire de  lorsque .

C'est-à-dire : .

Théorème :

Si  est de classe  et dérive d’un potentiel, alors le rotationnel de  est nul. Autrement dit, si  est de classe , alors 

Démonstration :

.

Donc  d’après le théorème de Schwarz.

Réciproque (admise) sur un ouvert étoilé :

Soit  un ouvert étoilé de , c'est-à-dire tel qu’il existe  tel que  :



Soit  un champ de classe  dont le rotationnel est nul. Alors  dérive d’un potentiel scalaire.

* 1. Formules

1. Linéarité : les opérateurs ,  et  sont linéaires.
2. Composition :

Si *f* est de classe  :

,  (Laplacien de *f*)

Si  est de classe  :  (démonstration avec Schwarz)

1. Produits : démonstrations par simple calcul…

Si  sont de classe , 

Si *f* est de classe , et  de classe , on a :





Symboliquement, les formules donnent :

