**Lois de composition interne**

* 1. Définition

Soit *E* un ensemble. Une loi de composition interne (l.c.i.) sur *E* est une application de  dans *E*. Si  est le symbole désignant cette l.c.i, l’image de  est notée . Ainsi, se donner une l.c.i.  sur *E*, c’est se donner une application : .

On parle souvent d’opération plutôt que de l.c.i.

Exemples :

* Les opérations usuelles + et  constituent des l.c.i sur N, Z, Q, R, C…
* La division  constitue une l.c.i sur l’ensemble Q\* (ou sur R\* ou C\*)
* La loi  constitue une l.c.i sur l’ensemble  des applications d’un ensemble quelconque *A* vers lui-même.
* Sur l’ensemble  des parties d’un ensemble , les opérations  et  sont des l.c.i.
* L’addition entre fonctions de R dans R est aussi une l.c.i sur 
  1. Propriétés éventuelles

Dans tout ce paragraphe,  désigne un ensemble muni d’une l.c.i.

* + 1. Associativité

On dit que  est associative lorsque, pour tous x, y, z de E : 

Cette valeur commune peut être alors notée sans ambiguïté 

Commutativité

On dit que  est commutative lorsque, pour tous x, y de E, .

Elément neutre

Soit . On dit que e est élément neutre pour  lorsque, pour tout x de E,  (les deux égalités doivent être vérifiées lorsque  n’est pas commutative)

Proposition :

S’il y a dans E un élément neutre pour , alors il n’y en a qu’un seul.

Démonstration :

Si e et e’ sont deux éléments neutres, alors  (La première égalité vient du fait que e est neutre, la seconde du fait que e’ est neutre)

Définition :

Si  est une l.c.i. associative sur E et s’il y a dans E un élément neutre pour , on dit que  est un monoïde. Si de plus  est commutative, on dit que ce monoïde est commutatif.

Exemple :  est un monoïde commutatif.

* + 1. Symétrique

On suppose ici que E admet un neutre e pour .

Soient x et x’ deux éléments de E.

On dit que x’ est symétrique de x (pour la loi ) lorsque .

Proposition :

Si  est associative, et si un élément x de E admet un symétrique pour , alors il n’en a qu’un seul.

Démonstration :

Si *x*’ et *x*’’ sont symétriques de *x*, alors :



Vocabulaire :

Un élément qui admet un symétrique est dit symétrisable. Ainsi, dans Z muni de la loi , l’ensemble des éléments symétrisables se réduit à .

En fait, dans le cas de certaines lois, comme la loi , on dit plutôt « inverse » et « inversible » plutôt que « symétrique » et « symétrisable ».

* + 1. Distributivité

On suppose que *E* est muni d’une deuxième l.c.i. notée #. On dit que  est distributive sur # lorsque, pour tous *x*, *y*, *z* de *E*:  et .

* 1. Stabilité

 désigne toujours un ensemble muni d’une l.c.i.

Soit *F* une partie de *E*. On dit que *F* est stable par  lorsque, pour tous *x*, *y* de *F*,  est encore dans *F*. Dans ce cas, on pourra dire que  définit, par restriction, une l.c.i. sur *F*.

* 1. Autres propriétés

Soit  un monoïde (ainsi,  est associative). Alors l’ensemble *S* des éléments symétrisables de *E* est stable par .

En effet :

Soient *x*, *y* deux éléments de *S*. On note *x*’, *y*’ leurs symétriques, *e* l’élément neutre de *E*.

On a :

.

Et .

Donc , et le symétrique de  pour  est .

Soit *A* un ensemble, et soit *E* un ensemble muni d’une l.c.i. . On définit sur  une loi  de la façon suivante :

Pour tous *f*, *g* de ,  est l’application de *A* dans *E* qui à tout *x* de *A* associe . Ainsi : .

Proposition :

1. Si  est associative sur *E*, alors  est associative sur 
2. Si  est commutative sur *E*, alors  est commutative sur 
3. Si il y a dans *E* un neutre pour , alors il y a dans  un neutre pour 
4. Si tout élément de *E* admet dans *E* un symétrique pour , alors tout élément de  admet dans  un symétrique pour .
5. On munit *E* d’une deuxième l.c.i notée # et on définit de même la loi  sur . Si  est distributive sur #, alors  ‘est distributive sur .

Démonstration :

1. Supposons  associative sur *E*. Soient *f*, *g*, *h* trois éléments de .

Soit . On a :



Et 

Donc .

Cette égalité est valable pour tout 

D’où l’égalité des applications :  et ainsi l’associativité de .

1. Supposons  commutative sur *E*. Soient .

On a, pour tout *x* élément de *A*:

.

Donc .

C’est valable pour tous . Donc  est commutative.

1. Supposons qu’il y ait dans *E* un neutre pour , noté *e*.

Alors l’application : , élément de , est neutre pour . En effet :

Soit . On a, pour tout *x* élément de *A*:



et 

Donc . Donc *g* est neutre pour .

1. Supposons que tout élément de *E* admette dans *E* un symétrique pour . Pour tout *x* de *E*, on note  le symétrique de *x* pour . On note de plus *e* un neutre pour .

Alors, pour toute application ,  est symétrique de *f* pour .

En effet : Soit . On a, pour tout *x* élément de *A*:





Donc  où .

Donc tout élément de  admet dans  un symétrique pour 

1. Supposons  distributive sur #. Soient *f*, *g*, *h* trois éléments de .

On a, pour tout élément *x* de *A*:



et :



donc  et .

Ces égalités sont valables pour tous . Donc  est distributive sur .