Corps (Commutatifs)

* 1. Définition

Soit K un ensemble muni de deux lois + et .

On dit que  est un corps (au sens corps commutatif) lorsque :

 est un groupe commutatif (de neutre noté )

 est un groupe commutatif (de neutre noté )

 est distributive sur +.

Ainsi, cela revient à dire que  est un corps lorsque  est un anneau commutatif non réduit à  et tout élément de  admet un inverse pour la loi .

Exemple :

 et  sont des corps.

* 1. Sous corps

Soit  un corps et soit *L* une partie de K. On dit que *L* est un sous corps de K lorsque :

* *L* est stable par + et .
*  et 
* 

Proposition :

Si *L* est un sous corps d’un corps , alors + et  constituent des lois de composition internes sur *L*, et  est un corps.

Exemple :

R est un sous corps de .

* 1. Un calcul dans un corps : somme de termes en progression géométrique

Soit .

Soit  une suite d’éléments de K. Soit 

On suppose que  est géométrique de raison *q*, c'est-à-dire :



Soit , et soit .

Alors :

Si , 

Si , 

* 1. Morphisme de corps

C’est la même chose qu’un morphisme d’anneaux.

Remarque :

La clause (3) de la définition d’un morphisme d’anneau de *A* vers *B* qui demande que l’image de  soit  peut être oubliée lorsque *A* et *B* sont des corps, car elle est alors conséquence de (1) et (2).

* 1. Corps des fractions d’un anneau intègre

Théorème et définition (admis) :

Soit  un anneau *intègre*.

Alors il existe un corps , unique à isomorphisme près, tel que :

-  est un sous anneau de  (autrement dit, *A* est inclus dans K et les lois + et  sur K prolongent les lois + et  sur *A*)

- Tout élément *x* de K s’écrit  avec , 

On dit alors que K est le corps des fractions de *A*.

Exemple :

Q est le corps des fractions de Z.