Courbes d’équation *ρ* = *f*(*θ*) en coordonnées polaires

* 1. Préliminaire

Ici, P désigne un plan affine euclidien orienté,  un repère orthonormé.

Pour , on note .



Soit . *M* admet le système de coordonnées polaires .

Ainsi, *M* est sur la droite , et .

 et  sont de même sens si et seulement si .

Soit *I* un intervalle infini de R. Soit , de classe  au moins.

La courbe d’équation polaire  dans R, c’est



C’est donc le support de l’arc paramétré .

Rappel :

 est de classe  sur R, et , noté .

Et, par récurrence, .

La donnée de  et du signe de  donne l’angle , ce qui suffit quasiment à tracer la courbe (ou du moins l’allure).

Exemple : .

Données :

*f* est de classe , et on a le tableau de signes :





* 1. Réduction de l’intervalle d’étude

On considère une courbe . Divers exemples :

* Si il existe  tel que , alors , puisque .

On obtient ainsi tout *C* pour  décrivant un intervalle d’amplitude .

* Si il existe  tel que  :



On obtient donc encore tout *C* avec un intervalle d’amplitude .

* Si 



On obtient alors *C* en se limitant à  (ou ), et en opérant sur la courbe obtenue une symétrie d’axe 

* Si 



On obtient tout *C* en se limitant à  puis en faisant une symétrie d’axe .

* Si 



Idem que précédemment, avec  (ou )

* Si 

On obtient *C* en se limitant à , puis en faisant une symétrie d’axe .

* Si 



On dessine sur un intervalle d’amplitude , puis on fait une symétrie par rapport à *O*.

* Autres cas plus variés :

Si  :

On dessine sur , puis on fait une rotation d’angle  (3 fois) et de centre *O*.

Si  :



On fait l’étude pour , puis une symétrie par rapport à la première bissectrice.

Si  :

On étudie sur un intervalle d’amplitude , puis on fait toutes les homothéties de centre *O* et de rapport .

Exemples, construire les courbes :



Pour les , on peut se limiter à un intervalle d’amplitude .

* Pour  : on se restreint à 

 : On peut se limiter à , puis on fait une symétrie d’axe 

 ; rien de mieux.

On obtient un cercle :



* Pour  :

. On peut donc se restreindre à .

 : Etude sur , puis symétrie d’axe .

 : Etude sur , puis une symétrie d’axe  donne sur .





* Pour  :

 : Etude sur un intervalle d’amplitude .

 : Etude sur un intervalle d’amplitude , puis 2 rotations d’angle  et de centre *O*.

 : Etude sur , puis symétrie d’axe  donne la courbe sur 





*  :

 : Etude sur 

 : Etude sur , puis symétrie d’axe .





* 1. Etude des tangentes

Soit , où *f* est de classe  (au moins)

Soit , on cherche la tangente en .

. Donc 

Ainsi, sur une courbe d’équation polaire , si , alors ce point n’est pas stationnaire (la famille  est en effet libre, pour tout , elle forme même une base orthonormée directe de la direction de P)

* Si  :

 fait un angle  avec  tel que 

En effet :

Si on note , alors 

Donc  et , (et donc )

D’où le résultat.

Ainsi :

Si , ce point n’est pas stationnaire, et la tangente  en ce point fait avec  un angle orienté  tel que 

On peut aussi retenir que  si  et  sinon.

* Si  :



* Si , alors  n’est pas stationnaire et la tangente est dirigée par .
* Si  et qu’on peut dériver suffisamment de façon à tomber sur le premier  non nul (s’il en existe) :



Ainsi, dans tous les cas la tangente est dirigée par .

Exemple :

 (« cardioïde »)

 : Etude sur 

 : Etude sur , puis symétrie d’axe .

Si  :





Etude des tangentes :



Donc 

En , on a donc , donc  (et ).

En , , donc  (et ).

* 1. Branches infinies

Diverses situations :

Soit  où *I* est un intervalle infini.

* Si *I* n’est pas majoré/minoré et , on a une branche infinie spirale.
* Si  où  : on obtient une direction asymptotique dirigée par /d’angle polaire .

En effet, en coordonnées cartésiennes :



Donc si , au voisinage de  : .

On a alors une direction asymptotique de pente .

Si , au voisinage épointé de  : 

Pour avoir les asymptotes, on fait ensuite l’étude de …

Exemple :

 où .

 : Etude sur .

 : Etude sur  puis symétrie par rapport à .







Autre exemple :



 : Etude sur .





Déjà, on a une direction asymptotique horizontale :



Tangente au point de paramètre  :

 où .

.

Donc . Donc  et *OM* est horizontal. Donc *T* est de pente 2.

En  :

. On note 

On a 

Donc . Donc la tangente est de pente 

* 1. Recherche de points doubles

On doit chercher les points doubles parmi les solutions de :



Et



Et



Exemple : on reprend celui de la fin du paragraphe précédent :

On cherche un point double, pour  et  (d’après l’allure de la courbe). On cherche donc  tel que .

C'est-à-dire 

Soit 

Soit 

Soit 

C'est-à-dire 

Soit . Donc .

* 1. Quelques courbes classiques en coordonnées polaires
     1. Droites
* Droite passant par *O*:  est une équation en coordonnées polaires de D.



* Droite orthogonale à  unitaire et passant par *H* tel que .



Rappel :



Soit : 



Donc 

Si  (alors , ), c'est-à-dire si D ne passe pas par *O*, l’équation s’écrit aussi .

* + 1. Cercles
* Cercle de centre *O*:

Pour ,  est une équation du cercle de centre *O* et de rayon *a* ( en est aussi une)

* Cercle *C* passant par *O* et de centre  de coordonnées polaires .

(C'est-à-dire telles que )

Soit . On a les équivalences :



Une équation polaire de *C* est donc 

L’équation trouvée est donc de la forme .

Inversement, soit .

Si , alors .

Sinon,  et  se met sous la forme 

(avec  et  tel que , )

On reconnaît le cercle passant par *O* de centre  tel que .

* + 1. Conique dont un des foyers est *O*.

Soient D une droite ne passant pas par *O*, ,  où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur D.

Si , on a une hyperbole, si  une parabole et si  une ellipse.

Disons que D est orthogonale à  et passe par *K* tel que  ( car D ne passe pas par *O*)



Ainsi, 

Soit  (donc )

*H* est déterminé par :  et  est colinéaire à .

Donc .



Donc .

Ainsi, on a les équivalences :



(Pour la dernière équivalence, si , on a en effet  car sinon  ou  ce qui est faux)

Une équation polaire de *C* est alors . (En effet,  est solution de (1) si et seulement si  est solution de (2))

 s’appelle le paramètre de la conique.

On retrouve la nature de la conique avec l’équation :

* Si  ne s’annule pour aucune valeur de  (c'est-à-dire si ), tout les  sont permis, on a donc une ellipse.
* Si  s’annule pour deux valeurs de  (modulo ), c'est-à-dire si  a deux solutions , c'est-à-dire si , on a alors une hyperbole.
* Si  ne s’annule qu’une fois modulo , c'est-à-dire si , on a alors une parabole.

Réciproque :

Soit  avec , .

1er cas : Si .

 avec , on obtient une droite.

2ème cas : Si  et 

 avec  et .

On reconnaît une conique d’excentricité *e*, de foyer *O* et de directrice associée



3ème cas : Si  et 

. On obtient un cercle de centre *O*.