Définitions relatives aux fonctions à valeurs réelles

* 1. Fonctions à valeurs réelles

Soit *A* un ensemble non vide.  désigne l’ensemble des applications de *A* dans R.

* + 1. Somme, produit, produit par un réel

Pour  et , on définit :

  

Si de plus *g* ne s’annule pas sur *A*, on pourra naturellement définir  et .

* + 1. Autres définitions

Pour , on définit :

 

Remarque : ces fonctions peuvent aussi bien être notées  ou .

Pour , on définit aussi :

  

Proposition :

 et 

Démonstration :

Soit .

Si , alors  et .

Donc 

Et 

Si , alors  et .

Donc 

Et 

Donc ,  et 

Soit  et .

* + 1. Inégalités sur les fonctions

Pour , on pose :



La relation  définie ainsi sur  est une relation d’ordre partiel.

La notation  signifie : 

Attention, si  et , on a pas nécessairement pour autant .

* + 1. Fonctions majorées, minorées

Soit . On rappelle que .

On a les équivalences :







Si *f* est majorée, on peut introduire le réel , qu’on définit comme étant  (l’ensemble  admet bien une borne supérieure puisque c’est un ensemble de réels non vide et majoré).

Si l’ensemble  est non seulement majoré, mais admet un maximum, on l’appellera le maximum de *f* et on le notera . On aura alors bien sûr , et on dira alors que la borne supérieure de *f* est atteinte (puisqu’il existe alors  tel que ).

De même, lorsque *f* est minorée, on peut introduire , qu’on note  lorsque la borne inférieure est atteinte.

Enfin, lorsque *f* est bornée, on s’intéresse à 

Notations équivalentes :

Sous réserve d’existence,  est aussi noté ,  noté …

* 1. Fonctions d’une variable réelle à valeurs réelles

Il s’agit maintenant des fonctions à valeurs dans R et définies sur une partie non vide de R. Dans toute la suite, *D* désigne une partie non vide de R.

* + 1. Fonctions monotones

Soit .

*f* est croissante .

*f* est strictement croissante .

*f* est décroissante 

*f* est strictement décroissante 

*f* est monotone  *f* est croissante ou *f* est décroissante.

*f* est strictement monotone  *f* est strictement croissante/décroissante.

Remarque : dans le cas où, on retrouve les définitions données dans le cadre des suites réelles.

Proposition :

Toute fonction  strictement monotone est injective.

Démonstration :

Soit  une fonction strictement monotone.

Soient , supposons que .

Alors , car sinon :

Soit , et alors  ou  car *f* est strictement monotone, ce qui est impossible (car ).

Soit , et alors  ou  car *f* est strictement monotone, ce qui est aussi impossible (car ).

Donc .

Donc *f* est injective.

Proposition :

Soient . Alors :

Si *f* et *g* sont monotones de même sens, alors  l’est aussi, et de même sens.

Si *f* est monotone, alors  est monotone de sens contraire.

Si *f* et *g* sont positives et monotones de même sens, alors  aussi.

Si *f* est strictement positive et monotone, alors  est monotone de sens contraire.

Démonstrations :

* Supposons *f* et *g* monotones de même sens.

Soient . Supposons que . On a alors :

Soit  et  si *f* et *g* sont croissantes,

Soit  et  si *f* et *g* sont décroissantes.

Donc soit , c'est-à-dire , soit , c'est-à-dire . Donc  est aussi monotone, et de même sens que *f* et *g*.

* Supposons *f* monotone.

Soient . Supposons que .

On a alors :  si *f* est croissante,  si *f* est décroissante.

Donc  ou .

Donc  est monotone, de sens contraire à *f* dans les deux cas.

* Supposons *f* et *g* positives et monotones de même sens.

Soient . Supposons que . On a alors :

 et  si *f* et *g* sont croissantes,

ou  et  si *f* et *g* sont décroissantes.

D’où on tire que  si *f* et *g* sont croissantes, ou  si *f* et *g* sont décroissantes.

Ainsi,  est monotone et de même sens que *f* et *g*.

* Supposons *f* strictement positive et monotone.

Soient , supposons que . Alors :

 si *f* est croissante, ou  si *f* est décroissante.

Donc  si *f* est croissante,  si *f* est décroissante.

Donc  est monotone, et de sens contraire à *f*.

Proposition :

Soient , , où *D*’ est une partie de R contenant  (donc non vide), de sorte qu’on puisse parler de .

Si *f* et *g* sont monotones de même sens, alors  est croissante.

Si *f* et *g* sont monotones de sens contraires, alors  est décroissante.

Démonstration :

* Supposons *f* et *g* monotones de même sens.

- Si *f*, *g* sont croissantes :

Soient . Supposons . Alors :

Comme *f* est croissante, .

, et . Donc, comme *g* est croissante :

, c'est-à-dire .

Donc  est croissante.

- Si *f*, *g* sont décroissantes :

Soient . Supposons . Alors :

Comme *f* est décroissante, .

, et . Donc, comme *g* est croissante :

, c'est-à-dire .

Donc  est croissante.

* Supposons *f* et *g* monotones de sens contraires.

- Si *f* est croissante et *g* décroissante :

Soient . Supposons . Alors :

Comme *f* est croissante, .

, et . Donc, comme *g* est décroissante :

, c'est-à-dire .

Donc  est décroissante.

- Si *f* est décroissante et *g* croissante :

Soient . Supposons . Alors :

Comme *f* est décroissante, .

, et . Donc, comme *g* est croissante :

, c'est-à-dire .

Donc  est décroissante.

* + 1. Fonctions paires, impaires

Soit .

*f* est paire 

*f* est impaire 

On vérifie immédiatement les propriétés sur les fonctions paires et impaires suivantes :

Soient .

Si *f* et *g* sont toutes les deux (im)paires, alors  a la même parité que *f* et *g*.

Si *f* et *g* ont la même parité, alors  est paire.

Si *f* et *g* sont de parités contraires, alors  est impaire.

Si *f* est (im)paire, alors  l’est aussi.

Soient , , où *D*’ est une partie de R contenant .

Si *f* est paire, et *g* est (im)paire, alors  est paire.

Si *f* est impaire, et si *g* est impaire, alors  est paire.

Si *g* est paire, alors  est paire.

* + 1. Fonctions périodiques

Soit .

Soit . On dit que *f* est *T*-périodique lorsque :



On dit que *f* est périodique lorsqu’il existe  tel que *f* est *T*-périodique.

Proposition :

La somme ou le produit de deux fonctions *T*-périodiques est *T*-périodique.

De plus, si , alors la somme ou le produit d’une fonction *T*-périodique et d’une fonction *T’*-périodique est périodique.

- Soient , *T*-périodiques.

Soit . Alors  et . De plus, on a :



et 

Ainsi,  et  sont bien *T*-périodiques.

- Déjà, pour , si *f* est *T*-périodique, alors *f* est -périodique, et une récurrence immédiate montre que pour tout , *f* est -périodique ; ainsi, pour tout , *f* est -périodique :

On a, pour tout  :



Et, si *f* est -périodique (), alors pour tout  :

, donc, comme *f* est *T*-périodique (hypothèse de départ) :



Et ,

Donc *f* est -périodique.

Soient maintenant , *T*-périodique, et , *T’*-périodique,

où . Soit  tel que .

Comme *g* est -périodique et *f* est -périodique – soit aussi -périodique –  et  sont -périodiques (ou -périodiques), donc périodiques.

Contre-exemple dans le cas où  :

On note  la fonction définie sur R par 

(on l’appelle la fonction caractéristique de Q)

Alors  est 1-périodique.

Mais la fonction  n’est pas périodique :

Supposons qu’elle le soit ; soit alors  tel que *f* soit *T*-périodique.

Soit , alors  soit .

Donc  car .

Donc , soit , puisque , ce qui est contradictoire puisqu’on avait supposé que , donc 

Donc .

Donc , soit 

Il existe donc  tel que 

Mais on a aussi , soit .

Il existe donc  tel que .

Mais alors , soit  donc , ce qui est contradictoire puisque . Donc , donc *f* n’est pas périodique.

* + 1. Fonctions lipschitziennes

Soit . Soit .

On dit que *f* est *k*-lipschtzienne (ou lipschitzienne de rapport *k*) lorsque :



On dit que *f* est lipschitzienne lorsqu’il existe  tel que *f* est *k*-lipschitzienne.

Interprétation :

Soit *C* la courbe représentative de *f* dans un repère plan. Dire que *f* est lipschitzienne revient à dire que l’ensemble des pentes des cordes tracées entre deux points de *C* est borné.

Exemple :

La fonction  est lipschitzienne sur , alors que  ne l’est pas.

- En effet, pour tout , on a :

.

Donc  est 2-lipschitzienne sur .

- Supposons qu’elle le soit. Soit alors  tel que  soit *k*-lipschitzienne

On a alors, pour tout  :



Donc .

Or, pour , on a :

 et , mais , on a donc trouvé  tel que . Donc l’hypothèse de départ est fausse, donc  n’est pas lipschitzienne.

* + 1. Extremum local, global

Soit , et soit .

On dit que *f* présente un maximum (global) en *a* lorsque .

Cela revient à dire que *f* admet un maximum, et que .

On dit que *f* présente un maximum local en *a* s’il existe un voisinage *V* de *a* tel que .

Cela revient à dire que  présente un maximum (global) en *a*.

La définition est analogue pour un minimum global ou local en *a*.

On rappelle que « extremum » signifie : maximum ou minimum.

* + 1. Propriété vraie sur une partie du domaine de définition

Soit *P* une propriété quelconque qu’une fonction réelle d’une variable réelle est susceptible d’avoir (par exemple « être positive », « être croissante »…)

Soit 

* Soit *D*’ une partie de *D*.

On dit que *f* a la propriété *P* sur *D*’ lorsque  a la propriété *P*.

(Comme dans le D) pour dire que  est *k*-lipschitzienne sur ).

* Soit *a* un point de  adhérent à *D*.

On dit que *f* a la propriété *P* au voisinage de *a* lorsqu’il existe un voisinage *V* de *a* tel que  a la propriété *P*.

Remarque :

Attention aux pièges du langage : une phrase telle que « *f* n’a pas la propriété *P* au voisinage de *a* » est ambiguë :

On peut l’interpréter comme : « non(*f* a la propriété *P* au voisinage de *a*) », qui signifie « quel que soit le voisinage de *a*, *f* n’a pas la propriété *P* sur  ».

Mais on peut l’interpréter aussi comme « *f* a la propriété non(*P*) au voisinage de *a* », qui signifie « il existe un voisinage *V* de *a* tel que *f* n’a pas la propriété *P* sur  ».

C’est en général la première interprétation qui est la bonne, mais c’est surtout le bon sens qui permet de décider.