Dénombrement

Dans ce chapitre, les lettres *E*, *F*, *G*, *A*, *B*, *C*,… désignent des ensembles, et les lettres *n*, *m*, *p*, *a*, *b*, *c*,… des entiers.

Préliminaires :

* Pour tout , on définit  de la manière suivante :



* Lorsque , il y a une seule application de *E* vers *F*. Cette application est injective (et surjective si et seulement si )
  1. Ensembles finis et cardinaux : les bases
     1. Supposé connu
* La notion d’ensemble fini ou infini.
* Ce qu’est le cardinal d’un ensemble fini ()
* Pour  avec , 

Admis :

Si *E* est fini, et si , alors *F* est fini, et 

Si *E* et *F* sont disjoints et finis, alors  est fini et :



* + 1. Conséquences

Si  sont finis et disjoints deux à deux, alors  est un ensemble fini de cardinal  (Cet ensemble est aussi noté )

Si *E* et *F* sont finis, alors  est fini et :



Démonstration :

. Or, , donc  est fini.

Les ensembles *E* et  sont disjoints.

Donc  est fini et 

Donc 

Par ailleurs, , et  et  sont disjoints et finis.

Donc 

Soit :

Donc 

* + 1. Résultats liant applications entre ensembles finis et comparaison de leurs cardinaux (admis)

1. Si *E* est fini, on a l’équivalence : Il existe une injection de *E* dans *F*  *F* est infini ou 
2. Si *F* est fini, on a l’équivalence : Il existe une surjection de *E* dans *F*  *F* est fini et 
3. Si *F* est fini, on a l’équivalence : Il existe une bijection de *E* dans *F*  *F* est fini et 

Autre résultat admis :

Soient *E*, *F* de même cardinal et finis.

Soit .

On a les équivalences :

*f* est injective  *f* est bijective

*f* est surjective  *f* est bijective.

* + 1. Notion d’ensemble dénombrable

Définition :

Soit *E* un ensemble. *E* est dénombrable lorsque *E* est fini ou lorsque *E* est en bijection avec N (*E* est alors infini dénombrable).

Exemples :

* N est dénombrable
* L’ensemble des nombres pairs *P* est dénombrable. En effet :

 est bijective.

* L’ensemble Z est dénombrable.



*  est dénombrable :



*  n’est pas dénombrable.
* R n’est pas dénombrable.
* L’ensemble *E* des suites  d’éléments de  n’est pas dénombrable ()

Démonstration :

Supposons qu’il le soit.

On peut alors écrire les éléments de *E*.



Pour chaque , on note  le terme d’indice *p* du *n*-ième élément de *E*.

On a alors un tableau :



Soit *u* la suite de *E* définie par :



Alors *u* n’est pas dans le tableau. 

En effet, supposons qu’il existe  tel que . Alors , et en particulier , ce qui est impossible.

Théorème (admis) :

Toute partie d’un ensemble dénombrable est dénombrable

* 1. Dénombrement classique

Dans ce paragraphe, tous les ensembles considérés sont finis.

* + 1. 

Proposition :

Si  et , alors .

Démonstration :

* informelle :

 nombre d’éléments de .

Nombre d’éléments = nombre de façons de « faire » un élément. Pour faire un élément  de , on doit choisir *a* dans *n* éléments, et *b* dans *p* éléments.

Visualisation :



* formelle :



Pour chaque ,  est bijective.

Donc . Les  pour  sont disjoints deux à deux.

Donc 

Conséquence :





 est la nombre de *m*-uplets  d’éléments de *E*.

* + 1. .

Proposition :



Démonstration :

 où les  sont distincts deux à deux.

 où les  sont distinct deux à deux.

Pour fabriquer une application de *E* dans *F*:

1) image de  : *p* possibilités.

2) image de  : *p* possibilités.

…*n*) image de  : *p* possibilités.

Donc  possibilités en tout.

Remarque : en particulier, 

* + 1. 

Proposition :



Démonstration :

On note , 

Se donner une partie *A* de *E*, c’est se donner la liste  de 0 et de 1 définie par : 

Or, il y a  telles listes (voir B))

Plus formellement :

L’application  définie par 

Est bijective.

* + 1. Nombre d’injections de *E* vers *F*.

On note , 

Le nombre d’injections de *E* vers *F* est 

En effet : (le cas où  étant évident)

Si .

Soit , et alors , ok (une seule injection d’un ensemble à 0 éléments vers un autre ensemble)

Si , notons alors .

Pour construire une injection de *E* vers *F*:

1) On choisit  ; *n* possibilités.

2) On choisit  ;  possibilités.

…*p*) On choisit  ;  possibilités.

On a donc  possibilités.

Remarque :  est aussi le nombre de *p*-listes d’éléments distincts d’un ensemble à *n* éléments.

* + 1. Nombre de permutations d’un ensemble fini

Définition :

Une permutation sur *E* est une bijection de *E* dans *E*.

L’ensemble des permutations sur *E* est noté .

Proposition :

Soit *E* de cardinal *n*. Alors le nombre de permutations sur *E* est .

En effet : comme *E* est fini, une application de *E* dans *E* est bijective si et seulement si elle est injective. Donc le nombre de permutations est .

* + 1. Nombre de parties à *p* éléments d’un ensemble à *n* éléments

Proposition :

Soit *E* de cardinal *n*, soit .

Alors le nombre de parties de cardinal *p* de l’ensemble *E* est :



Démonstration : (cas ,  évidents)

Cas où  : comptons de deux manières différentes le nombre de *p*-listes d’éléments distincts de *E*.

1) Ce nombre est 

2) Pour construire une telle *p*-liste , on choisit d’abord l’ensemble des *p* termes de la liste :  possibilités. On doit ensuite les ranger :  possibilités. Ainsi, le nombre cherché est 

Donc 

* 1. Propriétés des 

1. Pour tous  tels que , 

En effet, choisir *p* éléments parmi *n* revient à choisir les  qu’on ne prend pas.

1. Pour tous , 

Démonstration :

Si , , , 

Si , , , 

Sinon : Soit *E* de cardinal *n*. Comme , 

Soit alors . On a :

, où  est le nombre de parties à *p* éléments de *E* sans *a*, et  le nombre de parties à *p* éléments de *E* avec *a*. Alors :

 (on choisit *p* éléments parmi )

 (on choisit *a*, il reste à choisir les  autres éléments dans )

D’où le résultat.

Application :

Permet de remplir le tableau donnant les  :



1. 

En effet,  correspond au cardinal de l’ensemble des parties d’un ensemble à *n* éléments (nombre de parties à 0 éléments + nombre de parties à 1 élément +…)

Ou : , et les  sont disjoints deux à deux.

( : ensemble des parties à *k* éléments de *E*)

Donc , soit 

1. 

Démonstration (cas ,  triviaux) :

Si  :



Si  :

, , 

Autre démonstration, combinatoire, pour  :

Soit *E* de cardinal *n*. Comptons le nombre de couples  constitués :

* d’une partie *A* de *E* de cardinal *p*.
* d’un élément *a* de *A*.

Notons *n* ce nombre. On a :

, et , d’où la première égalité.

Mais aussi :

, et , d’où la deuxième égalité.

Exemple :

, 

 :   : 

 : 

1. La formule du binôme de Newton.

Théorème : Soient . Pour tout entier , on a :



Démonstration : par récurrence sur *n*, avec *a*, *b* fixés.

Montrons que 

\* *P*(0), *P*(1) ok

\* soit , supposons . On a :



Ce qui achève la récurrence.

1. Soit *E* de cardinal . Alors, il y a dans *E* autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Démonstrations :

\* On doit ainsi montrer : .

On a :

. Donc , soit , d’où le résultat.

\* On note *A* l’ensemble des parties de *E* de cardinal pair, *B* de ceux de cardinal impair. Soit alors . Soit *f* l’application définie par :



Alors  (on dit que *f* est involutive / une involution)

Donc *f* est bijective (car inversible, d’inverse elle-même). Donc *f*, par restriction, réalise une bijection de *A* sur son image, qui est évidemment *B*.