Développements limités

Dans tout le chapitre, *I* désigne un intervalle, et *a* un point de *I*.

* 1. Généralités
     1. Définitions

Soit , .

On dit que *f* admet un développement limité (DL) à l’ordre *n* en *a* lorsqu’il existe des réels  et une fonction  qui tend vers 0 en *a* tels que :



Autrement dit :

Lorsqu’il existe  tels que, au voisinage de *a*:



Ou encore lorsqu’il existe  tels que :

 au voisinage de 0.

Ainsi, la notion de DL à l’ordre *n* en *a* pour  revient à la notion de DL à l’ordre *n* en 0 pour .

Exemples :

* L’égalité  constitue un DL à l’ordre 2 en 0 de la fonction cosinus.
* On veut un DL à l’ordre 2 en  de cosinus :



* DL à l’ordre 3 en 0 de la fonction  :



* DL à l’ordre 5 en 0 de la fonction 



(Vrai à n’importe quel ordre)

* + 1. Théorème d’unicité des coefficients d’un DL

Théorème :

Soit , . Si *f* admet un DL à l’ordre *n* en *a*, alors les coefficients de ce DL sont déterminés de manière unique, c'est-à-dire que si  sont des réels tels que, au voisinage de 0 :



et ,

Alors 

Démonstration :

Soient  deux fonctions qui tendent vers 0 telles que :

 (1)

Où 

Alors, en prenant  dans (1), on obtient déjà .

En reportant et en simplifiant par *u* (si non nul), on obtient :



En faisant tendre *u* vers 0, on obtient alors …

…on répète l’opération. Donc :



Donc 

Donc , donc .

* + 1. Troncature d’un DL

Proposition :

Soit , . Si *f* admet un DL à l’ordre *n* en *a*, alors, pour tout , *f* admet un DL à l’ordre *p* en *a*, obtenu par troncature.

En effet :

* Pour , ok
* Sinon,  :



* 1. DL et dérivation

Proposition :

Soit  ; *f* a un DL à l’ordre 0 en *a* si et seulement si *f* est continue en *a*, et dans ce cas ce DL est , où  tend vers 0 en 0.

En effet :

* Si *f* est continue en *a*, alors , donc .
* Si *f* admet un DL à l’ordre 0 en *a*, il s’écrit , donc , donc *f* est continue en *a*, et .

Proposition :

Soit  ; *f* admet un DL à l’ordre 1 en *a* si et seulement si *f* est dérivable en *a*, et dans ce cas ce DL est  (1)

En effet :

* Si *f* admet un DL à l’ordre 1 en *a*, alors 

Donc avec , , et pour , .

* Si *f* est dérivable en *a*, on a vu que l’égalité (1) est vraie.

Attention : il est faux cependant qu’on ait un tel rapport pour les ordres supérieurs à 2.

Exemple :

Soit 

Alors *f* admet un DL à l’ordre 2 en 0 :



Donc *f* admet un DL à l’ordre 1 en 0 qui s’écrit , donc *f* est dérivable en 0 et . Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Pour , 

Donc 

Donc *f* n’est pas deux fois dérivable en 0.

Cependant :

Soit .

Soit *f* de classe  sur *I*. Alors *f* admet en tout point *a* de *I* un DL à l’ordre *n*, qui est donné par la formule de Taylor–Young :



Exercice :

Soit . Montrer que *f* est une bijection de R dans R dont la réciproque est de classe . Déterminer .

Déjà *f* est bijective, de classe  et de dérivée ne s’annulant pas. Donc  est de classe .

Comme  est de classe , elle admet un DL à l’ordre 3 en 0 :

, et .

Pour tout réel *x*, on a :

 d’une part.

et 

Soit 

Donc 

Donc 

Donc 

* 1. « Opérations sur les DL »
     1. « Retour à 0 »

On rappelle que  a un DL à l’ordre *n* en *a* si et seulement si  a un DL à l’ordre *n* en 0.

Exemple :

DL à l’ordre 3 en 1 de .

Pour tout  :

 où .

* + 1. Somme, produit par un réel

Proposition :

Soient , 

Si *f* et *g* admettent un DL à l’ordre *n* en *a*, alors  et  aussi, et les parties principales des DL de  et  sont obtenues en faisant respectivement le produit de la partie principale du DL de *f* par , et en faisant la somme des parties principales des DL de *f* et *g*.

Démonstration (sans introduire les notations) :



Donc :

.

Exemple :



Donc 

Et 

* + 1. Produit de deux DL

Exemple :





Donc :



Proposition :

Si deux fonctions *f* et *g* admettent un DL à l’ordre *n* en *a*, alors  admet un DL à l’ordre *n* en *a*, obtenu en ne conservant que les termes de degré  dans le produit des parties principales (polynomiales) des DL de *f* et *g*.

Démonstration (sans introduire les notations) :



Donc :

.

* + 1. Composition de DL

Exemple :

 où 

Donc 

On a donc obtenu le DL à l’ordre *n* en 0 de .

Théorème :

Soient , 

Soit  où *J* est tel que 

Si *f* a un DL à l’ordre *n* en *a*, et *g* un DL à l’ordre *n* en , alors  a un DL à l’ordre *n* en *a*, donné dans la démonstration.

Démonstration :

 où 

 où 



On a donc la somme d’un polynôme en *x* de degré  et d’une fonction négligeable devant .

Exemples :

* DL à l’ordre 3 en 0 de  :



 avec .

. Donc :



Donc :



On remarque qu’on pouvait se contenter de 

* DL à l’ordre 3 en 0 de  :

 où .

 où 

On pouvait là aussi se contenter de 

* DL à l’ordre 4 de 





Or, 

Donc 

Donc 

* + 1. Inverse

Proposition :

Soit . Si , et si *f* a un DL à l’ordre *n* en *a*, alors  aussi.

Démonstration :

, où  et .

Comme *f* a un DL à l’ordre *n* en *a*, *f* a un DL à l’ordre 0 en *a*, donc *f* est continue en *a*, donc, comme , *f* est strictement du signe de  au voisinage de *a*, donc  est bien définie au voisinage de *a*.



Où , et 

On note 

Alors *g* a un DL à l’ordre *n* en 0, et 

 a un DL à l’ordre *n* en 0, donc, par composition,  a un DL à l’ordre *n* en 0, d’où l’existence.

Rappel :



Exemples :

* DL à l’ordre 4 en 0 de  :





Or, 

Si on prend , on aura :



Et  car 



* DL à l’ordre 3 en  de  :





Or, 

Si on prend , on a :





 car 

Donc 

* 1. Primitive, dérivée
     1. Primitive

Théorème :

Soit , admettant un DL à l’ordre *n* en *a*.

Si *f* admet une primitive *F* sur *I*, alors *F* admet un DL à l’ordre  en *a*, obtenu de la manière suivante :

Si ,

Alors .

Démonstration :

 où .

Posons 

Ainsi, .

On doit donc montrer que .

Notons 

Soit .

D’après le théorème des accroissements finis appliqué à  entre 0 et *x*, il existe  tel que :



Ainsi, pour  :



Donc , donc .

* + 1. Dérivation

Théorème :

Soit . Si *f* est dérivable et admet un DL à l’ordre *n* en *a*, et si  admet un DL à l’ordre  en *a*, alors ce DL est obtenu ainsi :

Si ,

Alors 

Démonstration :

Il suffit d’appliquer à  le théorème précédent.

Attention :

L’hypothèse que  admet un DL est indispensable :



Alors *f* admet un DL à l’ordre 2 en 0, à savoir 

(Puisque )

Mais  n’admet pas de DL à l’ordre 1 en 0 puisque *f* n’est pas deux fois dérivable en 0, donc  n’est pas dérivable en 0, donc n’admet pas de DL à l’ordre 1 en 0.

* 1. Parité

Proposition :

Si  admet un DL à l’ordre *n* en 0, disons



Alors :

- Si *f* est paire, alors les  sont nuls

- Si *f* est impaire, alors les  sont nuls.

Démonstration :

Ici, *I* est un intervalle contenant 0 et centré en 0. On a :



Si *f* est paire, on a alors , et donc 

Si *f* est impaire, on a alors , et donc 

* 1. DL à connaître

Toutes les fonctions considérées sont de classe  au voisinage de 0, elles ont donc un DL à n’importe quel ordre en 0 :





On en tire plusieurs résultats :

- Déjà, 

D’où, par intégration, 

- Mais aussi, par intégration, 

- Ou encore 

D’où 

Et, par intégration : 

(Qu’on pouvait aussi retrouver en considérant que )



Avec :





Avec :





- Donc par intégration : 

- Ou 

D’où, par intégration : 

Et 

 : deux méthodes :

- 

- 

La dérivée de tangente est de classe  au voisinage de 0, donc admet un DL à l’ordre 4 en 0, et :



Or, 

Donc, par unicité des coefficients d’un DL :

. Donc  et 

* 1. Applications
     1. Recherche de limites, d’équivalents (exemples)

 ? On peut réutiliser les méthodes de Terminale (c’est ), ou :

Au voisinage de 0, on a :



Donc, pour  :

, d’où .

Donc la fonction  est prolongeable par continuité en 1 par la valeur 1, et la fonction obtenue admet un DL à l’ordre 1 en 1 :

. Donc *f* est dérivable en 1, et .

* Soit *f* définie sur , où *a* est un élément de *I*.

S’il existe  tels que, au voisinage de 0 privé de 0 :

, alors *f* est prolongeable par continuité en *a* (par ), et la fonction obtenue admet un DL à l’ordre *n* en *a*.

 ?

Au voisinage de 0, on a :



Donc 

* Le premier terme non nul d’un DL donne un équivalent :

Si  (avec ), alors .

* Donner un équivalent en  de .

Au voisinage de 0, on a :







Donc 

D’où 

* + 1. Dérivée, tangente, position d’une courbe par rapport à une tangente

On suppose que *f* admet un DL à l’ordre au moins 2 en *a*:

, où 

De ce DL, on tire :



D’où l’équation de la tangente à *C* au point *A* d’abscisse *a*: 

La position de *C* par rapport à la tangente *T* est donnée par le signe de :



Si  :



Donc  est du signe de  au voisinage de *a*.

Si , et si on suppose de plus qu’on peut faire un DL jusqu’à un ordre *p* suffisant de sorte que le coefficient de  ne soit pas nul :

 où  et 

Soit 

Donc  est du signe de  pour  au voisinage de *a* et du signe de  pour  toujours au voisinage de *a*.

On a donc, selon la parité de *p*:



* + 1. Etude locale en .

Exemple :

Etude de la fonction 

Déjà *f* est définie sur , et elle y est de classe 

Et 





Etude en  ou  :

Au voisinage de 0 :

 où 

Donc  où 

Donc 

Ainsi, l’écart entre la courbe *C* et la droite *D* d’équation  est  qui tend vers 0.

La droite *D* est donc asymptote à *C* en 

De plus, 

Donc *C* est au dessus de *D* en  et en dessous en .

Etude à gauche en 0 :

On pose 

Ainsi, *f* est continue à gauche en 0.

Pour .

Donc *f* est dérivable à gauche en 0, et 