Distribution de charges et de courants

* 1. Distribution volumique, surfacique, linéique



* + 1. Densité volumique

On considère un volume élémentaire .

* + - 1. Densité volumique de charge

.

Donc 

* + - 1. Densité surfacique de courant volumique
* On prend une surface élémentaire orientée  :



La charge qui traverse  pendant  est  (définition de )

Et 

* On a déjà montré que .
* Cas particuliers :
* Pour des porteurs identiques,  :



(*n*: nombre de porteurs par unité de volume,  : vitesse moyenne)

Donc  ou, avec  (densité volumique de charges mobiles) :



* Pour des porteurs différents :



* + - 1. Densité volumique de force de Lorentz



On a, dans le volume , pour chaque particule, 

(, : valeur moyenne des champs dans le volume)

Donc 

Soit 

On a donc une densité volumique de force de Lorentz



* + 1. Distributions surfaciques
       1. Densité surfacique de charge





On pose . Ainsi, 

* + - 1. Densité linéique de courant surfacique



On a .

Et 



On aura ici  ( : élément de surface sur )

Et 

* + 1. Distribution linéique



* + - 1. Densité linéique de charge

On pose 

* + - 1. Densité de courant linéique = courant

On pose  :



Donc 

Et 

( sont colinéaires)

Récapitulatif :

Charge élémentaire : 

Elément de courant : 

Intensité élémentaire : 

* + 1. Ordres de grandeur
       1. Densité de charges mobiles



Ainsi, on a une densité volumique de porteurs 

Donc 

Comparaison :

Pour un volume  (1mL) de cuivre :

Si on veut retirer tous les électrons de conduction (libres) et les mettre 10cm plus loin : la charge restante est 

Donc la force s’exerçant entre les deux parties a un module :



Par comparaison, le Soleil exerce sur la Terre une force de module  !

Et le travail à fournir pour amener ces charges est de 

* + - 1. Vitesse des porteurs
* Vitesse thermique :

On utilise le modèle de Drude : les électrons dans un conducteur sont comme des particules d’un gaz parfait.

Ainsi, 

Et 

* Vitesse de dérive :

C’est  quand le conducteur est parcouru par un courant (s’il n’y a pas de courant, )

Pour un fil de section , parcouru par un courant , on a , soit 

Ainsi, les électrons ont une vitesse d’agitation très importante, mais globalement, même traversés par un courant assez important, ils ont une vitesse moyenne très faible.

* 1. Postulat de la charge
     1. Conservation
        1. Expression globale

Pour une surface fermée fixe dans un référentiel quelconque, on a 

Soit , donc 

* + - 1. Expression locale



Remarque :

* En régime permanent (),
* Ce postulat est aussi valable en relativité.
  + 1. Invariance
       1. Postulat

La charge est invariante par changement de référentiel.

* + - 1. Transformation galiléenne des charges et des courants

Dans un référentiel *R* à l’instant *t*:

On considère des charges dans un volume 

* Dans *R*,

, et 

, soit 

* Dans un référentiel *R’* en translation à la vitesse  par rapport à *R*:

On cherche .

On a par invariance , et . Donc 

On a de plus  ; et, avec  :



Remarque :

Ces formules ne sont pas valables en relativité :

* La formule de composition des vitesses n’est pas valide
* Et la longueur, donc le volume, n’est pas invariante par changement de référentiel.
  1. Loi d’Ohm locale
     1. Loi d’Ohm en régime permanent
        1. Expression

Un champ électrique  provoque un courant . Si , on dit que la loi d’Ohm est vérifiée dans le matériau.

 s’appelle alors la conductivité électrique du milieu.

* + - 1. Discussion
* C’est une loi phénoménologique (correspond à un DL au premier ordre), et macroscopique.
* Elle est analogue à la loi de Fourier 
* Elle traduit un phénomène irréversible
* La loi est valable uniquement dans un matériau isotrope
* Domaines de validité :
* Dans les métaux et les solutions ioniques, la loi est généralement très bien vérifiée.
* Pour les mauvais conducteurs ou les gaz, les résultats sont moins bons :

On peut avoir un « plat », ou des termes d’ordre 2 qui apparaissent rapidement :



(Dans le deuxième cas, on a un claquage diélectrique : les électrons sont arrachés)

* On a réussi à créer des matériaux pour lesquels 
* C’est une loi locale.

La loi globale correspondante est .

En effet :



On a , 

Comme , on a 

*  dépend de la température :
* Pour les métaux,  (les métaux sont moins bons conducteurs à haute température).
* Pour une solution ionique, 
* Supraconducteurs :



(En dessous d’un certain seuil, la résistivité devient indétectable)

* Pour appliquer la loi d’Ohm, la seule force motrice doit être  :
* Il ne doit pas y avoir de champ magnétique, ou il faut pouvoir le négliger.
* Lorsqu’on a un gradient de température, la loi s’écrit sous la forme 
* Ordres de grandeur :

Pour l’argent, 

Pour le soufre, 

La conductivité varie sur un très grand domaine.

* + - 1. Interprétation
* Modèle macroscopique :

On va essayer de retrouver la loi d’Ohm :



Pour une particule chargée moyenne de charge *q*, au nombre de *n* par unité de volume, et de vitesse , on a :



Le principe fondamental de la dynamique s’écrit :

 ; on voit déjà que cette formule ne conviendra pas, car on trouvera au mieux une relation entre  et .

Hypothèse ad hoc (« on ajoute ce qu’il faut pour que ça marche ») :

On suppose que la particule est soumise en plus à une force de frottement visqueux .

Ainsi, l’équation devient :



En régime permanent :

On a 

Attention, on ne peut pas écrire pour autant  !

Visualisation, avec un fleuve :



En régime permanent, on aura en un point particulier du fleuve 

Mais si on suit une particule le long de son parcours,  !

 correspond en fait à une dérivée locale.

Calcul de  :

Plus généralement pour une fonction .

Pour une petite variation de *x*, *y*, *z*, *t*:



Soit 

Le terme  correspond à une dérivée locale,  à une dérivée convective.

Pour  dans ce cas, on aura :



On va supposer que  est négligeable devant  et .

Alors 

Conductivité :

On a ainsi 

Donc 

* Modèle microscopique :
* Modèle :

On prend cette fois les porteurs individuellement, de charge , de vitesse , soumis à deux forces :



Interactions avec les autres particules du milieu, par des chocs :



On suppose que  est totalement indépendant de  (la particule « oublie » sa vitesse d’avant)

Cela revient à supposer que lorsqu’on voit une particule avec une certaine vitesse après un choc, on ne peut pas déterminer quelle avait été sa vitesse avant, ce qui est assez naturel.

* On a 

Donc 

* Expression de  :

 ( : vitesse à la sortie du dernier choc)

Donc 

D’après l’hypothèse faite,  car les particules peuvent repartir dans n’importe quelle direction, avec n’importe quel module.

Donc  ( : temps de parcours moyen entre deux chocs)

* Ainsi, 

C'est-à-dire .

* Discussion :
* On a , donc 

C'est-à-dire 

Ainsi, les chocs se traduisent en moyenne par un frottement visqueux.

* Pour un métal (cuivre) :

On a , , 

 où *d* est la distance entre deux ions, et  la vitesse thermique des porteurs. Ainsi, avec , , on a .

D’où 

* Si on avait en plus un champ magnétique, le principe s’écrirait :



Si on ne peut pas négliger , la loi ne s’applique plus.

* En réalité, une théorie plus complète montre que la conductivité est due à des interactions des électrons avec les défauts du réseau.
  + 1. Loi d’Ohm en régime variable

On suppose que 

(On peut ensuite généraliser à un régime variable quelconque avec les transformées de Fourier)

* + - 1. Conductivité complexe

On a 

Ou 

(On admet que les termes supplémentaires sont effectivement négligeables)

On cherche donc des solutions sous la forme 

Dans l’équation, 

Ou 

Donc 

C'est-à-dire 

Où  est la conductivité en régime permanent.

Ainsi, on aura une différence de phase du courant sur le champ

Remarque :

On n’utilise les  que pour indiquer une transformée de Fourier ; ici,  est simplement un coefficient, qui se trouve être complexe.

* + - 1. Cas limites
* Lorsque , ou 

On a alors 

* Lorsque ,

On a 

Donc 

On verra que  correspond à la puissance volumique dissipée par effet Joule.

* Ordres de grandeur :

On doit avoir  pour que les effets se fassent sentir, c'est-à-dire une fréquence 

* 1. Complément
     1. Densité de charge dans un conducteur ohmique

On note  la densité de charge *totale* du conducteur (mobiles et fixes), et on suppose qu’on a un conducteur ohmique, c'est-à-dire que .

On suppose enfin que  est indépendant du point.

* + - 1. Conducteur à l’équilibre

A l’équilibre,

 donc 

Comme , on a même .

* + - 1. Conducteur en régime permanent

On aura 

Mais  (conservation de la charge)

Donc , soit , donc .

* + - 1. Conducteur en régime variable
* Ici, , ,  dépendent du temps.

Transformée de Fourier 

* On a , soit 

Et  où 

Et  soit 

(On considère pour simplifier que )

On obtient alors, après calcul, l’équation :

, où 

Ordres de grandeur :

Pour un bon conducteur, 

Et 

On a , du même ordre de grandeur pour tous les conducteurs (à porteurs identiques,  est constant)

* En régime quelconque :

L’équation devient :



Equation caractéristique :

, 

Pour un bon conducteur, , donc 

Et  (L’autre terme est divergent)

Dans un mauvais conducteur, , et 

Donc , et l’ensemble est amorti avec une constante de temps .

Dans les deux cas, le système est amorti avec la constante de temps la plus grande entre  et .

* Régime sinusoïdal :

On cherche 

Donc soit ,

Soit 

Pulsation plasma :

1. Il faut que la partie imaginaire soit nulle ou négligeable, c'est-à-dire , ou 
2. Pour la partie réelle : on doit avoir , c'est-à-dire , pulsation plasma.

Et on peut avoir alors  en régime permanent.

Interprétation :



Le bloc de porteurs se déplace « en bloc » d’une petite distance *x*.

Ainsi, il n’y a plus de porteurs à gauche.

On laisse alors le système évoluer :

Entre les deux couches, on a un champ 

Donc le champ tend à le faire revenir vers leur position initiale.

On a alors un oscillateur harmonique :

Principe fondamental de la dynamique appliqué à un porteur moyen :



Soit 

Et on a donc une pulsation 

Ainsi,  est la pulsation propre du système de charges.