Dipôles linéaires, régime transitoire

* 1. Dipôles *R*, *L*, *C*.
     1. Dipôles linéaires



Un dipôle est dit linéaire lorsque *u* et *i* sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

, avec les *ai*, *bi* constants.

* + 1. Résistors
       1. Dipôle linéaire

 ou 



 (Ohm)

 (Siemens)

* + - 1. Association en série ou en parallèle

Les dipôles sont en série lorsque ils appartiennent à une même branche (il n’y a pas de nœuds entre eux).



. On a : .

On a 

Les dipôles sont en parallèle lorsqu’ils sont liés à deux mêmes nœuds du circuit.



. D’après la loi des noeuds : 

On a 

* + - 1. Diviseur de tension



* + - 1. Diviseur de courant



* + 1. Bobines

Bobine idéale : . *L* est l’inductance de la bobine, positive.

(Henry).

Bobine réelle :  (*i* est continu)

La bobine est donc un dipôle linéaire.

* + 1. Condensateur



Conservation de la charge :  : charge dans *v* (armature de gauche) à *t* ou .

 où *C* est une constante positive, la capacité du condensateur.

Relation entre *u* et *i* :

 (donc *u* est continue)

Le condensateur est donc un dipôle linéaire.

(Farad).

* + 1. Aspect énergétique
       1. Effet Joule





Interprétation microscopique : les porteurs de charge gagnent de l’énergie cinétique sous la tension et cèdent cette énergie cinétique à cause des chocs avec le conducteur. Transfert d’énergie = transfert thermique (chaleur).

 (Effet Joule)

* + - 1. Energie magnétique stockée par une bobine

Bobine idéale : . ()

On pose . Donc .

 est donc l’énergie magnétique stockée dans la bobine sous la forme d’un champ magnétique. Quand ,  augmente, quand ,  diminue.

* + - 1. Energie électrique stockée par un condensateur

.

On pose . Donc .

 est donc l’énergie électrique stockée par le condensateur sous la forme d’un champ électrique. Quand ,  augmente, quand ,  diminue.

* 1. Générateurs linéaires
     1. Sources de tension et de courant idéales
        1. Source de tension idéale

C’est un dipôle aux bornes duquel *u* est constante, quel que soit *i*.



*e* : force électromotrice de la source de tension (fém).

* + - 1. Source de courant idéale

C’est un dipôle traversé par un courant constant d’intensité constante, quelle que soit la tension.

*j* : courant électromoteur ou courant de court-circuit (ccc) de la source.



* + 1. Source réelle



Représentation de Thévenin :



Caractéristique : 

*e* : fém de la source

*r* : résistance interne

Représentation de Norton :



 avec  et 

*j* : ccc de la source

*g* : conductance interne.

* + 1. Dipôles linéaires en régime continu

En régime continu, *u* et *i* sont indépendants du temps : 

Donc l’équation différentielle devient : 

Un dipôle linéaire est donc un générateur linéaire en courant continu.

* + 1. Association en série et en parallèle de dipôles linéaires
       1. En série

Dipôles représentés dans le modèle de Thévenin :



 où  si  et *u* sont dans le même sens, -1 sinon.

Donc . Une association en série de dipôles linéaires est donc un dipôle linéaire de fém la somme des fém des dipôles, et de résistance interne la somme des résistances internes des dipôles.

* + - 1. En parallèle

Représentation dans le modèle de Norton :



Loi des nœuds :

.

Une association en parallèle de dipôles linéaires est donc un dipôle linéaire de courant de court-circuit la somme des courants de court-circuit des dipôles, et de conductance interne la somme des conductances internes des dipôles.

* + 1. Echelon de tension et de courant



* + - 1. Echelon de tension



Réalisation :



Pour , interrupteur en 2. 

Pour , interrupteur en 1. 

* + - 1. Echelon de courant



Réalisation :



Pour , interrupteur ouvert. 

Pour , interrupteur fermé. 

* + - 1. Fonction de Heavyside



Donc e, 

* 1. Equations différentielles linéaires à coefficients constants du 1er et 2nd ordre
     1. Equation différentielle du 1er ordre
        1. Homogène (sans 2nd membre)

, où 

*f* est solution de l’équation différentielle sur R si, et seulement si, (,  (l’ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1)

* + - 1. Avec 2nd membre

, où , et .

*f* est solution de l’équation différentielle sur *I* si, et seulement si, , . On suppose que l’on en connaît une solution particulière . Alors *f* est solution de l’équation différentielle sur *I* si et seulement si ,  soit, pour tout *x* de *I*,    
(car  est alors solution de )

* + - 1. Second membre continu par morceau

Cas particulier : *Y*0 constante par morceaux ("en escalier").

Sur .

Sur , etc.

On admet que si *f* est solution sur R de l’équation différentielle, alors f est continue sur R. Continuité en  :



Continuité en 

On peut alors trouver  en fonction de .

* + 1. Equations différentielles du 2nd ordre homogène

, où .

On admet que les solutions forment un ensemble vectoriel de dimension 2. *f* est solution de l’équation différentielle si, et seulement si, il existe  tels que  (où *f*1, *f*2 sont deux solutions particulières non proportionnelles)

Une solution de la forme  donne :

*F* est solution de l’équation si, et seulement si  . Donc *r* est solution de l’équation du 2nd degré.

* + - 1. Cas .

2 racines réelles .

Donc  et  sont solutions de l’équation différentielle.

(non proportionnelles).

Donc *f* est solution de l’équation différentielle sur R si, et seulement si :

.

* + - 1. Cas .

1 racine double .

Donc  est solution de l’équation différentielle. De plus,  est aussi solution de l’équation différentielle. (Vérification…) Ces deux solutions ne sont pas proportionnelles. Donc *f* est solution de l’équation différentielle sur R si, et seulement si : , soit aussi : .

* + - 1. Cas .

2 racines complexes 

Donc et sont solutions complexes non proportionnelles de l’équation différentielle. Donc *f* est solution de l’équation différentielle sur C si, et seulement si : C,, soit aussi :  D’oùR :

. Pour que *f* soit une solution réelle, il suffit donc que. On ne considère que les solutions réelles. On a ainsi :

R,R,.

On pose  et . Donc 

Avec  tel que et .

.

Ainsi, *f* est solution de l’équation différentielle sur R si, et seulement si : ,R,.

* + 1. Equation différentielle du 2nd ordre avec 2nd membre

Même chose que pour l’équation différentielle de 1er ordre : trouver une solution particulière , et la solution générale de l’équation est la "somme" de cette fonction particulière  et de la solution générale de l’équation différentielle homogène associée.

*F* solution générale de l’équation différentielle avec 2nd membre = Solution particulière  + Solution générale homogène .

* 1. Circuit *R*,*L*
     1. Equation électrique du circuit *R*,*L*



D’après la loi des mailles :



Donc . Equation différentielle du 1er ordre avec 2nd membre.

* + 1. Réponse à un échelon de tension



Résolution sur  :



Si , ce qui est impossible physiquement.

Donc . Donc 

Résolution sur  :



Le courant qui traverse la bobine est une fonction continue du temps.

Donc 

Donc 







 : temps de relaxation ou constante de temps du circuit *R*,*L*.

On distingue trois zones :

, régime permanent 

, régime permanent 

, régime transitoire

Pour , 

Pour , 

 est la durée caractéristique du régime transitoire.

* + 1. Régime libre du circuit *R*,*L*

Ici, 

Résolution sur  :



De même ici, . Donc 

Résolution sur  :





Donc 



Aspect énergétique :

Pour  :





Entre , énergie dissipée par effet Joule :



L’énergie magnétique stockée à  dans la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

* + 1. Visualisation à l’oscilloscope

A  :

Echelon de tension 

Régime libre 

*e*(*t*) : fonction créneau de période  et de valeur maximale *E*.



* + 1. Application



La lampe s’allume quand 

On suppose que 

Pour , l’interrupteur est en (0), la lampe ne s’allume pas.



Pour , l’interrupteur est en (1). Alors  (le courant parcourant la branche du générateur est nul).

D’après la loi des mailles,



Le courant dans la bobine est continu.

Donc . Donc 



* 1. Circuit *R*,*C*
     1. Equation électrique du circuit *R*,*C*





* + 1. Réponse à un échelon de tension

Ici, on a 

Solution pour  :



De même ici, on aura 

Le condensateur correspond à un interrupteur ouvert en régime permanent : c’est un coupe-circuit.

Solution pour  :



Pour que *q* soit continu, il faut que , soit 

Donc 



 est la constante de temps ou temps de relaxation du système.

* + 1. Régime libre



Pour  :



Pour  :



Donc 



Aspect énergétique :

Pour , on a () :



On a donc :



L’énergie stockée dans le condensateur à  est redistribuée au circuit sous forme d’effet Joule, dissipée dans la résistance.

* + 1. Visualisation à l’oscilloscope

A  :

Echelon de tension 

Régime libre 



* 1. Circuit *R*,*L*,*C*
     1. Régime propre du circuit *R*,*L*,*C* série



On note 

D’après la loi des mailles, on a :



On a 

Donc l’équation devient , soit 

On a donc une équation différentielle homogène linéaire du 2nd ordre.

On pose :



L’équation différentielle devient alors :

 ou, en posant  :





Résolution de l’équation électrique :

L’équation caractéristique de l’équation différentielle est 



1er cas : 

On a alors deux solutions réelles 

La solution générale de l’équation différentielle s’écrit donc :



On a donc un régime apériodique.

Détermination de *A* et *B* : en prenant par exemple 



Comme le courant traversant la bobine est continu, 

Comme la charge du condensateur est continue, 

Donc 

Allure des courbes :





Le temps caractéristique est donc 

2ème cas : 

On a une racine double 

La solution générale est donc :

, solution du régime critique.

Détermination de *A* et *B* pour  :



Ainsi, , soit 

Donc . Et 

La représentation est analogue au cas où .

Le temps caractéristique vaut  (durée du régime libre).

3ème cas : 

. On pose 

Donc . Ainsi, 

Solution générale (réelle):



On a alors :



On a un régime pseudopériodique.

Détermination de *A* et *B* pour  :



Donc





Représentation graphique :









On pose  (sans dimension)



Ainsi,





Relation entre l’amortissement et *Q* :

On suppose  on a alors : 

Ainsi, 

On a donc un régime d’amortissement faible.

* + 1. Réponse à un échelon de tension





Résolution sur  : 

 (régime permanent)

Résolution sur  : 





En régime pseudopériodique :

avec 

Comme *q*(*t*) est continu (présence du condensateur), 

Donc  (en dérivant)

Donc 





* + 1. Aspect énergétique

Equation électrique 

Donc 

Soit 

En régime libre, 



Donc  diminue et tend vers 0 avec une constante de temps 

Perte d’énergie au cours d’une pseudo période :



Donc 

Perte relative d’énergie au cours d’une pseudo période :



Pour un amortissement faible () :



Développement limité de  au voisinage de  :



Donc . Donc 

Donc *p* est d’autant plus petit que *Q* est élevé.

Ainsi, pour , les pertes électromagnétiques sont faibles

Pour , les pertes sont fortes (Attention, la relation  n’est plus vraie : elle n’est valable que pour )