Régime sinusoïdal forcé

* 1. Définitions
     1. Régime sinusoïdal forcé



Loi des mailles :



Solution générale homogène : solution qui tend vers 0 de façon exponentielle avec une constante de temps  qui dépend des caractéristiques des dipôles du circuit (Ici, ). Cette solution correspond donc au régime transitoire.

Solution particulière : on s’intéresse à l’unique solution particulière périodique, après disparition de tout les transitoires (qui tendent vers 0). On appelle cette solution le régime sinusoïdal forcé (R.S.F.).

Le régime sinusoïdal forcé est une solution périodique sinusoïdale, avec la même pulsation que l’excitation (2nd membre)



* + 1. Grandeurs sinusoïdales – complexes

Soit  une grandeur sinusoïdale (G.S.).

 est la pulsation de la grandeur sinusoïdale (si , transformer)

 est la période,  la fréquence.

 est l’amplitude de la grandeur sinusoïdale,  la phase à l’origine, et  la phase à l’instant *t*.

Complexes : on note *j* une solution de  (pour éviter les conflits de notation avec l’intensité).

Un nombre complexe est noté  avec  et . (remarque : un complexe conjugué est noté )

Relation de passage : ou 



Propriétés :



* 1. Notation complexe
     1. Représentation complexe d’une grandeur sinusoïdale

A une grandeur sinusoïdale , on associe la grandeur complexe (G.C.) 

On a :





L’association de  et  est donc unique.



 : amplitude complexe, contient toute l’information sur l’amplitude réelle *X* de la grandeur sinusoïdale et sur la phase à l’origine  (de la grandeur sinusoïdale)

* + 1. Propriétés de la notation complexe
       1. Linéarité

Pour toutes grandeurs sinusoïdales *x*, *y* à la pulsation , pour tous réels  constants, on a :



Démonstration :

. C’est donc une grandeur sinusoïdale à la pulsation . On peut lui associer une grandeur complexe :



* + - 1. Dérivation

Soit une grandeur sinusoïdale . La grandeur complexe associée est 

On a :



C’est donc une grandeur sinusoïdale.

On peut lui associer la grandeur complexe :



* + - 1. Intégration

Soit une grandeur sinusoïdale . On s’intéresse à l’unique primitive de *x* qui est une grandeur sinusoïdale (constante d’intégration nulle) :



Donc 

* + 1. Application



D’après la loi des mailles, 

Solution du régime sinusoïdal forcé : 

On a donc :



Si  :





On peut ensuite préciser 

* 1. Dipôles linéaires passifs en régime sinusoïdal forcé
     1. Impédance complexe d’un dipôle linéaire passif
        1. Relation entre *u* et *i*.



En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales à la même pulsation .

Un dipôle linéaire vérifie la relation :

 (où les  et les  sont des constantes nulles à partir d’un certain rang). Pour un dipôle linéaire passif, on a .

Donc, avec les grandeurs complexes, en régime sinusoïdal forcé :



Soit 

Donc  sont proportionnels, de coefficient de proportionnalité 

L’équation s’écrit aussi :

, avec  et 

(Relation indépendante du temps)

* + - 1. Propriétés de l’impédance complexe *Z*.



 impédance du dipôle (en ).







Donc 

Donc *i*(*t*) atteint son maximum après *u*(*t*) (si )



 est l’avance de phase de la tension sur le courant ; 





* + - 1. Admittance complexe



 : Admittance complexe du dipôle



 : Admittance du dipôle (en Siemens : *S*).





* + 1. Impédance complexe de dipôles linéaires usuels
       1. Résistance





En régime sinusoïdal forcé à la pulsation , ce sont des grandeurs sinusoïdales. Donc 

 impédance complexe de la résistance ()



()

* + - 1. Bobine idéale



. Donc 

 impédance complexe de la bobine



Comportement en haute fréquence  :



(équivaut donc à un circuit ouvert)

Comportement en basse fréquence 



(Equivaut donc à un fil)

* + - 1. Condensateur





Donc 

 impédance complexe du condensateur



Comportement en haute fréquence  :



(équivaut donc à un fil)

Comportement en basse fréquence 



(Equivaut donc à un circuit ouvert)

* 1. Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé à la pulsation .
     1. Lois de Kirchhoff



Dans une maille d’un réseau linéaire : d’après la loi des mailles, 

En régime sinusoïdal forcé à la pulsation , ce sont des grandeurs sinusoïdales.

Donc  (où )

Soit 



D’après la loi des nœuds : 

En régime sinusoïdal forcé à la pulsation  :



Soit 

* + 1. Association d’impédances
       1. Association en série



D’après la loi des mailles :



On a donc un dipôle linéaire d’impédance complexe 

* + - 1. Association en parallèle



On a donc un dipôle linéaire d’impédance complexe telle que  ou d’admittance complexe  (d’après la loi des nœuds)

* + - 1. Diviseur de tension et de courant









* + 1. Théorème de Millman



D’après la loi des nœuds, 

et 

Donc 

Variante avec un courant :

Loi des nœuds : 



* + 1. Générateur sinusoïdal
       1. Générateur de tension sinusoïdale idéale



, indépendant de *i*(*t*).

*e*(*t*) est la force électromotrice de la source de tension sinusoïdale.

 avec 

*E* est l’amplitude complexe de la fém de la source.



* + - 1. Générateur de courant sinusoïdal idéal



, indépendant de *v*(*t*).

*j*(*t*) est le courant électromoteur ou courant de court-circuit.



*J* est l’amplitude complexe du courant de court-circuit.



* + - 1. Générateur sinusoïdal réel





Modélisation (représentation de Thévenin)



*E* : fém du générateur

*Z* : impédance interne du générateur



Représentation de Norton :



* 1. Résonance d’intensité du *R*,*L*,*C* série







D’après la loi des mailles :



Donc . En considérant que  :





* Etude de  :

 est maximum si  est minimum, c'est-à-dire  ou (pulsation propre du circuit *R*,*L*,*C*)

. Ainsi, l’impédance de l’association du condensateur et de la bobine s’annule.

En basse fréquence () :  (à cause du condensateur)

En haute fréquence () :  (à cause de la bobine)



On a donc une résonance d’intensité en 

* Pulsation de coupure à -3dB :

On cherche les deux pulsations pour lesquelles 

On a :





 Donc



On remarque que 

 est donc la moyenne géométrique de  (au milieu sur un graphique en échelle logarithmique)

Bande passante 

Longueur de bande passante 

Facteur de qualité : . Donc 

La résonance est d’autant plus aigue/marquée que *Q* est grand (pour )

* Etude de 



En basse fréquence :  (*u* en retard de  par rapport à *i*)

(On a  car , c’est donc comme si on a un condensateur seul)

En haute fréquence,  (*i* en retard de  par rapport à *u*)

(Idem que précédemment pour la bobine)

A la résonance, . Donc *i* et *u* sont en phase. L’association des dipôles correspond à la résistance seule.







* 1. Résonance de tension aux bornes du condensateur



()



Diviseur de tension :



On pose 





Donc 



* Etude de 



On cherche 





Si ,  ne s’annule pas. On a donc un seul extremum en .



Si , 





Si  : 





Q est alors le facteur/coefficient de surtension.

* Pulsation de coupure à -3dB

 avec 



On cherche les pulsations telles que  ()

On a :





Donc 

On suppose  (*Q* assez grand)



Bande passante 

Largeur de la bande passante 

Si  :  (c'est-à-dire )



et 

Donc 



* Etude de  :

 (Avance de phase de *u* par rapport à *e*(*t*))





* 1. Puissance en régime sinusoïdal forcé
     1. Grandeurs efficaces

On considère une grandeur *x*(*t*), périodique de période *T* (de moyenne nulle sur un nombre entier de périodes)

On pose alors *X*éff tel que :



Dans le cas particulier d’une grandeur sinusoïdale :





Donc 

Exemple : EDF fournit une tension de 220V efficaces.

Donc  et 

* + 1. Facteur de puissance

On considère un dipôle linéaire en régime sinusoïdal forcé à la pulsation .



 ( est l’avance de phase de *u* sur *i*)



Donc 



On note *Pm* la puissance moyenne / puissance active du dipôle :



 est ici le facteur de puissance du dipôle.

. Il faut donc que  soit le plus grand possible pour que  soit minimal afin de minimiser les pertes Joules.

* + 1. Pour un dipôle linéaire passif





, avance de la tension sur le courant.



 et , soit .

Donc 

Ou 

(car )

Cas particuliers :

Résistance *R* : 

Bobine et condensateur : 

* + 1. Puissance et notation complexe

Définition : puissance complexe 



Donc 

On note :  où :

*P*ac est la puissance active (partie réelle)

*P*r est la puissance réactive (partie imaginaire)



Donc



*P*ac correspond à la puissance consommée par le dipôle.

Pour un dipôle complexe d’impédance *Z* :



Ou, de même : 

Donc



Exemples :



*P*r représente donc la puissance stockée par le dipôle (mesurée en V.A.R : vol ampère réactifs).

* + 1. Théorème de Boucherot

Association en série de dipôles linéaires :





Association en parallèle de dipôles linéaires





Cette relation est donc valable pour n’importe quel réseau.



* + 1. Augmentation du facteur de puissance d’une installation électrique



 avec . Pour avoir  le plus petit possible, il faut donc avoir  le plus grand possible.

Nouvelle installation :





Donc  (où *Z’* est l’association de *C* et *Z*)

On a :  (diviseur de courant)

Avec , on obtient alors :



Ainsi, . Pour que , il faut donc que , soit .

Ainsi,  ; on a moins de pertes Joule.