Eléments de calcul différentiel

- On va s’attacher ici au cas des fonctions définies sur un ouvert  de  et à valeurs dans R. (On peut adapter les résultats à d’autres cas si nécessaire)

- Les éléments de  seront vus parfois comme points () ou d’autres fois comme vecteurs ()

-  désigne une norme quelconque sur .

- Visualisation :

Si , on peut visualiser la situation en se représentant l’ensemble *S* des , qui est une surface de  : c’est la nappe d’équation .



*S* est à *f* ce qu’une courbe est à une fonction d’une variable dans R.

* 1. Dérivées partielles
     1. Dérivées (éventuelles) partielles premières par rapport à chaque variable

Soit , soit .

On pose , et 

Si  est dérivable en *a*, on dit que *f* admet une dérivée partielle première en *A* par rapport à la première variable, qui n’est autre que , qu’on note :

 ou encore .

De même, sous réserve d’existence :

 ou  est la dérivée en *b* de l’application , laquelle application est définie sur .

Remarque :

 étant un ouvert de ,  et  sont des ouverts de R.

Ainsi,  est un voisinage de *a*,  un voisinage de *b*.

La notion de dérivabilité ne dépendant que de  (ou ) au voisinage de *a* (ou de *b*), la notion de dérivée partielle de *f* en *A* est elle aussi locale.

Exemples :



Alors *f* admet des dérivées partielles par rapport à *x* et *y* en tout point  de , et , .



Soit . Alors, comme  est un ouvert (complémentaire d’un singleton), c’est un voisinage de . L’étude des dérivées partielles de *f* en  ne dépend que de *f* sur ce voisinage, et sur ce voisinage on a .

D’où on tire l’existence des dérivées partielles premières, et :



Etude en  :

L’application partielle  est nulle, donc dérivable et de dérivée nulle en 0. Donc  existe et vaut 0.

De même, .

Attention, *f* n’est pas pour autant continue en .

* + 1. Définitions

Soit .

* Si  et  sont définies en tout , on note :

 et .

* Si  et  sont définies et continues sur , on dit que *f* est de classe .
  + 1. Dérivées partielles premières selon un vecteur

Soit .

Soit .



Soit , et .

Si la fonction  est dérivable en 0, on dit que *f* admet une dérivée partielle première en *A* selon le vecteur  qui n’est autre que . On la note .

Remarque :

* Ici encore, la notion est locale…
* L’éventuelle dérivée partielle première en *A* selon  correspond à l’éventuelle dérivée partielle première en *A* selon la première variable.

Ainsi, sous réserve d’existence : 

Et de même 

En effet, sous réserve d’existence,  est la dérivée en *a* de  et  la dérivée en 0 de .



Existe-t-il une dérivée partielle première en  selon le vecteur  ?

, donc *f* n’est pas dérivable selon .

* 1. Développement limité à l’ordre 1 pour une fonction de classe .
     1. Le théorème

Théorème :

Soit  de classe . Soit .

Alors il existe une fonction , définie sur l’ensemble  telle que  tend vers 0 en  et pour tout , , où on a noté . Cette expression s’appelle le DL de *f* à l’ordre 1 en *A*.

Ou encore :  où .

Démonstration (hors programme) :

On pose, pour tout ,  si , et  sinon.

Alors  vérifie bien l’expression ; reste à montrer que  tend vers 0 en .

Comme  est ouvert, il existe  tel que , où on a noté  une boule ouverte pour . Posons . (Alors déjà )

Alors pour tout  de *W* et tout , .

En effet, soit , et soit .

Alors .

Or, . Donc, si on note , on a . Donc .

Donc .

Maintenant :

Soit , on note  :



( est bien dans , comme on vient de le voir, avec )

On note  (donc  est une fonction réelle d’une variable réelle, c’est la deuxième application partielle associée à *f* en ), définie et dérivable sur .

Selon le théorème des accroissements finis appliqué à  entre *b* et , il existe  tel que , c'est-à-dire :



De même, il existe  tel que 

Donc :



Or,  où  car  est continue en , et de même,  où .

Donc 

Et pour tout  :



Donc  tend vers 0 en , d’où le résultat.

* + 1. Conséquences

1. Si *f* est de classe  sur , alors elle est continue sur .

En effet, pour tout , on a :



Donc , donc *f* est continue en *A*.

1. Si *f* est de classe , alors pour tout  et tout ,  est définie, et l’application  est continue.

En effet :

Si *f* est de classe , alors, pour tout , on a :

.

Soit alors .

Alors, pour tout  tel que , c'est-à-dire tel que , on a :



Donc  est dérivable en 0, de dérivée 

(puisque )

* + 1. Divers

Soit *f* de classe  sur .

On vient de voir que pour tout  et tout ,  existe et vaut  lorsque .

Pour *A* fixé dans , l’application  est une forme linéaire sur , on la note , différentielle de *f* en *A*. Ainsi, 

On introduit alors le vecteur  tel que cette forme linéaire soit  (pour  muni de sa structure euclidienne naturelle)

Ce vecteur est appelé , gradient de *f* en *A*.

Ainsi : 

Donc .

On note .

C'est-à-dire que  et  sont les formes linéaires  et .

On peut considérer l’application .

Cette application est notée , et s’appelle la différentielle de *f*.

Ainsi, , et on peut noter .

Récapitulatif :

, différentielle de *f*.

, différentielle de *f* en *A*.



Le DL à l’ordre 1 en *A* s’écrit alors :

 où 

Ainsi,  est une approximation linéaire de la différence 

* 1. Opérations sur les fonctions de classe .
     1. Sommes, produits…

Proposition :

Soient  de classe . Soit .

Alors les fonctions  sont de classe  sur , et :

,  et . Idem pour .

Démonstration : immédiat

Par exemple, pour  :

Soit . Les fonctions  sont dérivables en , de dérivées . Donc  est dérivable en , et sa dérivée en  est :



Donc  est définie en tout point  de , et .

Or, *f*, , *g* et  sont continues, donc  est continue sur .

De même pour , donc  est de classe .

Proposition :

Soit  de classe .

Soit *D* un ouvert non vide de R.

Soient *u*, *v* deux fonctions de *D* dans R de classe .

On suppose que .

Alors la fonction  est de classe , et :

.

Démonstration :

Soit . On étudie  pour  tel que . On a :



Où 



Où .

Donc :



Et 

car ,  et d’après le théorème de composition de limites.

Donc *F* est dérivable en , et on a bien la formule voulue, qui montre en plus que  est continue (car *u*, *v*, *u’*, *v’*,  et  le sont…), donc que *F* est de classe .

Proposition :

Soit *U* un ouvert de .

Soient *u*, *v* deux fonctions de *U* dans R, de classe .

Soit  de classe .

On suppose que .

On peut donc considérer .

Alors *F* est de classe  sur *U*, et, pour tout  :



De même, .

Démonstration :

Soit . Alors , c'est-à-dire , est du type traité dans la proposition précédente.

Cette fonction est donc dérivable en , de dérivée :



D’où la première formule, et de même la deuxième et ainsi la classe de *F*.

Exemple : gradient en coordonnées polaires.



On peut introduire la fonction  telle que pour tout ,  est la valeur (en Volt) du potentiel au point *M* de coordonnées cartésiennes .

On peut aussi introduire  telle que pour tout ,  est la valeur (en Volts) du potentiel au point *M* de coordonnées polaires .

Ainsi, pour tout , .

On a  où .

On a, pour tout  :



Donc :



Et



Pour , de coordonnées polaires  :

Avec , .

* 1. Généralisations

On a vu le cas des 

On peut aisément adapter au cas , et même plus généralement à .

On a vu aussi le cas des , où « tout va bien » composantes par composantes (sauf pour le théorème des accroissements finis, et donc la démonstration du théorème pour les développements limités – qui est quand même vrai, mais admis pour l’instant)

On peut donc parler des fonctions  où « tout va bien » sur les composantes de l’arrivée.

Cas particulier : Champ de vecteurs sur  :

C’est une fonction  où  est un ouvert de 

*F* est de classe  si et seulement si *X*, *Y*, *Z* le sont, et :



On a alors le théorème : Toute composée bien définie de fonctions de classes  est de classe , et formules à adapter…

Exemple :

Si , alors :



De même, si  :



* 1. Dérivées partielles d’ordre supérieur

Définition :

Soit . Soit .

* Si  est définie au voisinage de , et si  est dérivable par rapport à *x* (1ère variable) en ce point, la dérivée  est notée .
* De même, sous réserve d’existence, ,
* Et 
* Et .

Généralisation récurrente :

Soit .

Sous réserve d’existence, les dérivées *p*-ièmes de *f* en  sont les deux dérivées premières de chacune des dérivées -ièmes de *f* en .

Définition :

Soit . Si les quatre dérivées partielles secondes de *f* sont définies et continues sur , on dit que *f* est de classe .

Plus généralement, si les  dérivées partielles d’ordre *k* sont définies et continues sur , on dit que *f* est de classe .

Proposition :

Pour , si *f* est de classe , alors *f* est de classe  (où  signifie « *f* est continue »)

En effet, si *f* est de classe , alors les dérivées partielles -ièmes de *f* ont leurs dérivées partielles premières continues (puisque ce sont les dérivées partielles *k*-ièmes de *f*), et sont donc de classe . Donc ces dérivées partielles -ièmes sont continues, donc *f* est de classe .

Théorème de Schwarz (admis) :

* Si *f* est de classe  sur , alors .
* Plus généralement, si *f* est de classe  sur , alors les dérivées partielles d’ordre *k* ne dépendent que du nombre de dérivations par rapport à chaque variable.

On peut élargir aisément les définitions aux fonctions de , ouvert de , dans , où le théorème de Schwarz reste encore vrai.

Et de plus les opérations sur les fonctions de classe  sont toujours valables…

Remarque :

On n’a besoin que de la composition :

Par exemple, si *f* et *g* sont deux fonctions de  dans R de classe , on a :

 est de classe , et  est de classe , donc  est de classe , et on a .

* 1. Extremums

Théorème :

Soit , où  est un ouvert de , de classe . Soit .

Si *f* présente un extremum (local) en *A*, alors .

La réciproque reste ici encore fausse (exemple : configuration en col, ou )

Démonstration :

Supposons que *f* présente un maximum local en *A*. Il existe alors un voisinage *V* de *A* contenu dans  (prendre au pire ) tel que .

On introduit  tel que .

Alors  présente un maximum local en *a*, et est dérivable sur . La dérivée de cette fonction est donc nulle en *a*, c'est-à-dire .

Et, de même, .

* 1. Notion de plan tangent à une surface d’équation .



Soit  de classe , notons *S* la surface d’équation .

Soit , .

On sait que, pour tout , on a :



où .

Par définition, le plan tangent en  à *S* est le plan d’équation :

.

C’est la plan qui approxime le mieux la surface au voisinage du point considéré.

Considérons les deux courbes  et  tracées sur *S* de la manière suivante :

 et 

Où  et .

 est naturellement paramétrée par .

Vitesse : . Et, au point considéré, .

De même, sur , 

Alors  forme une base de la direction du plan tangent en , c'est-à-dire du plan vectoriel d’équation .

* 1. Courbes de .

On se place ici dans le repère canonique de .

* + 1. Diverses situations
* En coordonnées cartésiennes :
*  (résolue en *y*) (1)
*  (résolue en *x*) (2)
*  où  (non résolue) (3)
* Paramétrique :  (4)
* En coordonnées polaires :
*  (1b)
*  (2b)
*  (3b)
* Paramétrique :  (4b)
* Passage d’une situation à une autre :

Passage de (1) à (3) / (2) à (3) : évident. (idem avec b)

Passage de (1) à (4) / (2) à (4) : évident. (idem avec b)

Passage de (4b) à (4) : 

Pour le passage de (3) à (1) ou (2), on n’a pas de méthode systématique, mais on a un théorème.

* + 1. Théorème des fonctions implicites

Théorème (admis) :

Soit  un ouvert de .

Soit , de classe .

On suppose qu’il existe  tel que .

Si , alors l’équation  définit localement *y* comme fonction de *x*, c'est-à-dire qu’il existe  tel que pour tout , il existe un unique  tel que .

Et de plus, si on note , alors  est de classe  au voisinage de , et .

On adapte le théorème pour 

Visualisation :



Justification que  :

On a, pour tout , 

Donc, en dérivant : .

Application :

Tangente à  en un point  où  et  sont non tous deux nuls. Supposons par exemple .

Ainsi, localement, la courbe se résout en .

La tangente en  a alors pour équation 

C'est-à-dire 

Ainsi, si , alors la tangente à *C* en  existe et est orthogonale à .

* + 1. Passage local de représentation paramétrique à résolu en *x* ou *y*.

Soit *C* le support d’un arc paramétré  où  sont de classe  au moins, et on suppose l’arc régulier (c'est-à-dire que  ne s’annule pas)

Soit  (qu’on suppose ouvert). Si par exemple , alors il existe un voisinage  de  tel que le support de l’arc paramétré restreint à , c'est-à-dire l’arc , admette une équation du type .

Démonstration :

 est de classe , et . Il existe donc un voisinage  de  tel que . Donc  est strictement monotone, et réalise donc une bijection sur un intervalle *W* dont la réciproque est de même classe que . Donc l’arc restreint à *V* admet le paramétrage , c'est-à-dire  où .

* + 1. De paramétré en cartésiennes à paramétré en polaires

Soit  où  sont de classe  ()

On suppose que *C* ne passe pas par *O*.

Alors *C* admet une représentation paramétrique en coordonnées polaires du type , *r* et  étant de classe .

En effet, pour tout  :



(C’est possible car )

* 1. Surfaces de .
     1. Diverses représentations (en coordonnées cartésiennes)
* Equations du type ,  ou  (résolues)
* Equations non résolues : 

Exemple :

Plan d’équation  où 

Sphère 

* Paramétrage de surface :

,  décrivant un domaine D de ,  de classe  avec  et  indépendants (sinon on n’obtient pas une surface)

* + 1. Passage local de représentation  à une équation résolue

(Et donc passage ensuite à une représentation paramétrique)

Théorème des fonctions implicites :

Soit *F* de classe  sur . Soit  tel que . Si , alors, au voisinage de , l’équation  définit *z* comme fonction de *x* et *y*, cette fonction  est de classe  et on a :

, 

(Même justification pour les dérivées que pour )

* + 1. Plan tangent à une surface
* Soit  ouvert de .

La fonction  est de classe , avec  et ,  sont indépendants.

Soit  de paramètre .



Courbes tracées sur *S* passant par  :

 passe par le point  au paramètre .

 passe par  au point de paramètre .

Les deux vecteurs  et  sont donc indépendants. Le plan tangent à *S* en  est le plan passant par  et de direction  (et de vecteur normal , c'est-à-dire )

Remarque :

Les autres courbes tracées sur la surface sont les courbes de la forme , où , de classe suffisante.



Soit , on suppose que .

Ainsi, , donc  est dans la direction du plan tangent à .

* Cas où .

Soit . On suppose que , c'est-à-dire que l’une des dérivées partielles n’est pas nulle.

Donc selon le théorème des fonctions implicites, on a localement une paramétrisation de *S*: , passant en , disons au point de paramètre .

On a donc un plan tangent de direction  où  et .

Or, on a .





Donc  et  sont orthogonaux à , et son indépendants.

Ainsi, le plan tangent à *S* en  est le plan passant par  orthogonal à , c'est-à-dire d’équation :



Ou encore .

Ainsi, par exemple :

Si , et si  est un point de *S*.

Equation du plan tangent à *S* en  :





(On vérifie en effet immédiatement que l’application  est linéaire)

L’équation du plan tangent est donc .