Equations différentielles

Dans tout ce qui suit, on parle de fonctions d’une variable réelle, à valeurs dans .

Résoudre une équation différentielle  sur un intervalle *I*, c’est trouver les solutions  définies et dérivables sur *I*, vérifiant .

Les courbes représentatives des fonctions solutions s’appellent les courbes intégrales de l’équation.

* 1. Equations différentielles linéaires du premier ordre
     1. Généralités

Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type , où *a*, *b*, *c* sont des fonctions, *a* n’étant pas la fonction nulle.

*I* étant un intervalle sur lequel *a*, *b*, *c* sont définies, une fonction *f* est solution de cette équation sur *I* lorsque *f* est définie et dérivable sur *I* et : .

Par exemple, la fonction  est solution sur R de l’équation .

Proposition :

L’ensemble des solutions sur un intervalle *I* de l’équation linéaire du premier ordre homogène :  est un sous-espace vectoriel du K-ev  (éventuellement réduit à ).

Si l’équation différentielle linéaire du premier ordre complète  admet une solution  sur *I*, alors les solutions sur *I* de (*E*) sont exactement les fonctions ,  décrivant le K-ev des solutions sur *I* de (*H*)

Démonstration :

* On note *H* l’ensemble des solutions de (*H*). soient .

On a, pour tout  :



, soit, en multipliant par  : 

En sommant les deux égalités obtenues, on obtient :



Soit :



Donc  est solution de (*H*), donc .

De plus, la fonction nulle est évidemment solution de (*H*).

Donc *H* est un sous-espace vectoriel de .

* Supposons que (*E*) admette une solution  sur *I*.

\* Soit *f* une solution de (*E*).

On a alors, pour tout  :

 et 

Donc 

Donc  est solution de (*H*).

\* Réciproquement, soit  une solution de (*H*).

On a alors, pour tout  :





Donc, en sommant :



Donc  est solution de (*E*).

* + 1. Résolution d’une équation différentielle linéaire homogène d’ordre 1 sur un intervalle « agréable »

Soit , on suppose que *I* est un intervalle sur lequel *a* et *b* sont continues, et *a* ne s’annule pas sur *I*; on va résoudre (*H*) sur *I*.

Etude :

Sur *I*, l’équation (*H*) s’écrit aussi , où  est la fonction , définie et continue sur *I*. Soit *G* une primitive de  sur *I*. On remarque alors que  est solution de (*H*). (et aussi que  ne s’annule pas sur *I*)

Recherche des autres solutions :

Soit  une fonction dérivable sur *I*. On peut introduire , dérivable sur *I*, telle que  (on peut prendre , puisque  ne s’annule pas et est dérivable sur *I*).

Alors . Or,  est solution de (*H*).

Donc 

Donc .



D’où le théorème :

Soit  une équation linéaire du premier ordre homogène et soit *I* un intervalle sur lequel *a* et *b* sont continues et *a* ne s’annule pas. Alors :

- En notant *G* une primitive quelconque sur *I* de , les solutions sur *I* de (*H*) sont les fonctions de la forme  décrivant K.

- Si une solution de (*H*) sur *I* s’annule en un point, elle est nulle

- Le K-ev des solutions de (*H*) sur *I* est de dimension 1, toute solution non nulle de (*H*) en constitue donc une base.

Démonstration :

Le premier point découle de l’étude, les autres sont conséquences directes de ce premier point.

Cas particulier :

Equation différentielle linéaire d’ordre 1 homogène (*H*) à coefficients constants :

Il s’agit d’une équation pour laquelle les fonctions *a* et *b* sont constantes, avec . Les solutions (sur tout intervalle de R, et en particulier R) de l’équation différentielle  sont les .

* + 1. Recherche d’une solution particulière à l’équation différentielle linéaire du premier ordre complète (*E*)

On doit chercher une solution particulière de 

Considérations diverses :

Déjà, il se peut que le contexte en donne une.

Dans certains cas, on peut voir tout de suite une solution, ou au moins la forme de la solution. Par exemple, l’équation  admet évidemment la solution particulière . On verra des choses intéressantes à ce propos dans le paragraphe II (qu’il faudra adapter à ce cas).

Méthode de « variation de la constante » :

On se place sur un intervalle *I* où *a*, *b*, *c* sont continues et où *a* ne s’annule pas.

On connaît une solution , non nulle (et qui ne s’annule donc pas sur *I*), à l’équation 

On cherche alors une solution *f* de (*E*) sous la forme , où  est une fonction dérivable. On a les équivalences :



* + 1. Conclusion

On peut énoncer le théorème suivant, à propos de l’équation différentielle linéaire du premier ordre complète  sur un intervalle « agréable » :

Théorème :

Soit  une équation différentielle linéaire du premier ordre, et soit *I* un intervalle sur lequel *a*, *b*, *c* sont continues, et *a* ne s’annule pas. Alors :

- (*E*) admet une infinité de solutions sur *I*.

- Si  désigne une solution non nulle (donc ne s’annulant pas) de l’équation homogène associée (*H*), et si  désigne une des solutions de (*E*), que l’on peut obtenir par la méthode de variation de la constante, alors l’ensemble des solutions de (*E*) sur *I* est l’ensemble des ,  décrivant K.

- Pour tout couple  de , il existe une et une seule solution de (*E*) sur *I* qui prend la valeur  en .

Démonstration du dernier tiret, avec les notations des tirets précédents :

Soit .

Existence :

Une solution de (*E*) qui prend la valeur  en  est , en posant .

Unicité :

Si  sont deux solutions de (*E*) telles que  et .

Déjà, il existe  tels que  et .

Alors , .

Donc . Comme , on a alors , soit , d’où , d’où l’unicité.

* 1. Equations différentielles du second ordre
     1. Généralités

Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation du type , où la fonction *a* n’est pas nulle.

Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle *I* est solution de cette équation sur *I* si et seulement si .

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d’ordre 1, on établit aisément :

Proposition :

L’ensemble des solutions sur un intervalle *I* de l’équation différentielle linéaire d’ordre 2 et homogène  est un sous-espace vectoriel du K-ev  (éventuellement réduit à )

Si l’équation linéaire du second ordre complète  admet une solution sur *I*, alors les solutions sur *I* de (*E*) sont exactement les fonctions ,  décrivant l’espace vectoriel des solutions sur *I* de (*H*).

On va s’intéresser maintenant aux équations à coefficients constants, c'est-à-dire aux équations pour lesquelles les fonctions *a*, *b*, *c* sont constantes (avec ). On aura donc à étudier une équation du type : , avec . (le second membre n’est pas nécessairement constant).

* + 1. Résolution d’une équation linéaire homogène d’ordre 2 à coefficients constants

Soit l’équation , avec  et . On fait la résolution sur un intervalle *I* quelconque (mais infini), étant entendu qu’on cherche les solutions à valeurs dans K.

Par analogie avec ce qu’on a eu pour les équations du premier ordre, cherchons les solutions du type , où .

Lorsqu’on remplace dans l’équation, on a, après simplification, l’équivalence :

 est solution de (*H*)  *r* est solution de l’équation .

Cette équation s’appelle l’équation caractéristique associée à l’équation différentielle (*H*). Supposons qu’elle admette dans K des solutions  (éventuellement confondues). Cherchons alors les autres solutions de (*H*).

Soit *f* deux fois dérivable sur *I*, et soit .

On note , .

On a les équivalences :



Ainsi, si , on a donc :



Et si ,on a :



En prenant , on a la proposition suivante :

Proposition :

Soit  une équation différentielle linéaire d’ordre 2 à coefficients (complexes) constants. Alors les solutions complexes de (*H*) sur *I* forment un C-ev de dimension 2.

Plus précisément, si on note (*C*) l’équation , on a :

(1) si (*C*) admet deux racines distinctes , alors cet espace est engendré par les fonctions  et .

(2) si (*C*) admet une racine double , alors cet espace est engendré par les fonctions  et .

Démonstration :

Il reste simplement à montrer que les deux familles sont libres (puisqu’on a déjà montré qu’elles étaient génératrices dans l’étude précédente).

On note , , .

Soient .

Si  sont distincts :

Supposons que .

Alors .

Si , alors .

Soit , ce qui est impossible (car  et *I* est infini).

Donc , d’où  (car sinon )

Si (*C*) admet une racine double  :

Supposons que 

Alors 

Donc 

Donc  (car sinon , ce qui est faux car *I* est infini)

D’où .

Donc les deux familles sont libres.

L’une d’elles forme donc selon le cas une base de l’ensemble des solutions de (*H*).

Avec  maintenant :

Proposition :

Soit  une équation linéaire du second ordre à coefficients (réels) constants. Alors les solutions réelles de (*H*) forment un R-ev de dimension 2.

Plus précisément, si on note (*C*) l’équation , on a :

(1) si (*C*) admet deux racines réelles distinctes , alors cet espace est engendré par les fonctions  et .

(2) si (*C*) admet une racine (réelle) double , alors cet espace est engendré par les fonctions  et .

(3) si (*C*) admet deux racines complexes non réelles conjuguées  et , alors cet espace est engendré par les fonctions  et .

Démonstration :

Les points (1) et (2) résultent de la proposition précédente. Pour (3) :

Déjà, le C-ev  des solutions complexes de (*H*) est de dimension 2, de base B constitué des fonctions  et . La famille des fonctions  et  est donc aussi une base de  (puisqu’elle est libre…) donc  est aussi l’ensemble des ,  et  décrivant C. Or, *f* est, par construction, la fonction  et *g* la fonction .

Comme ces deux fonctions sont à valeurs réelles, une solution  de (*H*) est à valeurs réelles si et seulement si  et  sont réels. (la partie imaginaire de  est , qui n’est nulle que si , puisque  est libre).

Ainsi, l’ensemble  des solutions réelles de (*H*) sur *I* est l’ensemble des ,  et  décrivant R.

Donc  est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du R-ev  (la famille  est évidemment toujours libre dans le R-ev )

Remarques :

* Dans le cas (3), l’ensemble des solution réelles de (*H*) sur *I* est ainsi l’ensemble des fonctions , mais aussi celui des fonctions 
* Dans les deux cas (réels et complexes), les solutions sur *I* se prolongent toutes en des solutions de R.
  + 1. Recherche d’une solution particulière d’une équation linéaire d’ordre 2 à coefficients constants

Dans ce qui suit, *a*, *b*, *c* sont des éléments de K, avec .

* + - 1. Considérations générales
  + Si  est solution de , et si  est solution de  alors, pour tous scalaires ,  est solution de .
  + Si *a*, *b*, *c* sont réels, et si *f* est une solution complexe de , alors  est une solution de ,  une solution de  et  une solution de .
    - 1. Second membre polynomial

Si *Q* est un polynôme de degré *n*, alors l’équation  admet, sur R, une solution polynomiale de degré *n* si ,  si  et ,  si .

En effet :

L’application  de  dans lui-même est linéaire…

* + Si , il est clair que  conserve les degrés, donc  et  est inclus dans . Donc  constitue une bijection de  dans lui-même, d’où l’existence de *P* de degré *n* tel que , c'est-à-dire tel que  soit solution de l’équation.
  + Si  et , il est clair que  abaisse « d’un cran » les degrés, donc  et  est inclus dans , donc, d’après le théorème noyau – image, . Il existe donc *P* de degré  tel que . (mais non unique, contrairement au cas précédent ; à une « constante additive » près en fait)
  + Si  : l’existence de *P* est évidente.
    - 1. Second membre polynôme fois exponentielle

Si *Q* est un polynôme de degré *n*, alors l’équation  admet une solution du type , où *P* est un polynôme de degré *n* si  n’est pas solution de l’équation caractéristique, sinon de degré , ou même  lorsque  est racine simple/double de l’équation caractéristique.

En effet, on a les équivalences (en notant (*E*) l’équation différentielle) :



donc *f* est solution de (*E*)  est solution de  où , .

On est donc ramené au cas du 2) avec comme équation caractéristique , et  n’est nul que si  est racine au moins simple de l’équation , et  n’est nul que si  est racine double de cette même équation (alors )

* + - 1. Cas réel, second membre polynôme fois exponentielle fois sin ou cos

Pour les équations :

 ou , où tout le monde est réel, il suffit de prendre une solution réelle ou imaginaire d’une solution de 

Remarque :

Toutes ces considérations valent aussi, après adaptation, pour les équations différentielles linéaires d’ordre 1 à coefficients constants.

* 1. Autres équations différentielles

En général, on ne sait pas faire, ou plutôt on ne peut pas faire la résolution d’une équation différentielle avec des fonctions usuelles.

Equations différentielles à variables séparables :

Une équation différentielle du type  « se résout » en , où *F* et *G* sont une primitive respectivement de *f* et *g*.

Reste alors à « inverser » *F* pour obtenir pour obtenir *y* en fonction de *x*…