Espace vectoriel euclidien

* 1. Définition et notations

Un espace vectoriel euclidien  un R-ev de dimension finie muni d’un produit scalaire.

Dans tout ce chapitre, *E* désigne un R-ev euclidien de dimension , le produit scalaire est noté . Pour , on note aussi :

-  pour  (parfois on rencontre aussi )

-  pour 

-  pour  (ainsi,  est la norme associée au produit scalaire , on l’appelle la norme euclidienne)

-  pour 

Exemple :  muni du produit scalaire canonique : on parle de la structure euclidienne canonique de .

Remarque : Si *E* est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel *F* de *E* est muni naturellement d’une structure euclidienne, obtenue par restriction.

* 1. Bases orthonormales
     1. Généralités

Définition, proposition :

Une base orthonormale (ou orthonormée)  une famille orthonormale de vecteurs de *E* qui en forme une base = une famille orthonormale de *n* vecteurs de *E* (car une famille orthonormale est libre.

Théorème (Schmidt) :

Soit  une base quelconque de *E*.

Alors il existe une unique base orthonormale  telle que :



On dit que  est la base orthonormale s’appuyant sur la base  par le procédé d’orthonormalisation de Schmidt.

Préliminaire (graphique) :



Démonstration :

On montre par récurrence sur *p* que, pour tout , « on a une et une seule manière de construire  ».

* Il est évident qu’il y a une seule façon de construire  de sorte que :

 (cela impose que , avec  car )

 (cela impose alors que , ainsi )

, donc .

Ainsi, . Réciproquement, ce vecteur convient bien

* Soit . Supposons  construit.

Montrons qu’il y a un et un seul choix de sorte que :



 est orthogonal aux 





1. impose que  soit combinaison linéaire des 



et  car sinon  et  serait alors combinaison linéaire des .

Donc .

Et inversement, si , alors on a bien (1).

1. impose que pour .

Or, pour  car on a  si , 1 sinon, par hypothèse de récurrence.

Ainsi, 

Inversement, si cette condition est vérifiée, on a bien (2).

1. impose que , c'est-à-dire que .

Donc 

( car sinon )

Inversement, si on a cette valeur de , on a bien (3).

1. impose le choix de +, car .

Or,  car  est orthogonal aux .

Donc  donc .

Inversement, si , on a bien (4).

Ce qui achève la récurrence.

Conséquences :

1. Dans un espace vectoriel euclidien, il existe au moins une base orthonormale
2. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

En effet :

Soit  une famille orthonormale. Comme elle est libre, on peut la compléter en une base  de *E*. Par le procédé d’orthonormalisation de Schmidt, on obtient alors une base orthonormale . Mais, d’après le théorème de Schmidt appliqué dans , on a .

* + 1. Produit scalaire et base orthonormale

Soit  une base orthonormale de *E*.

Soit , de composantes  dans B, notons .

Soit , de composantes  dans B, notons .

On identifie ici R et  pour ne pas charger les notations :



Ainsi, .

Et, en particulier : 

Ainsi, l’application , qui est un isomorphisme de R-ev, est aussi un isomorphisme de R-ev euclidien \*,  étant muni de sa structure euclidienne canonique. (\* C'est-à-dire que pour tout , en plus des règles pour un R-ev).

Remarque :

Inversement, soit *E* un R-ev de dimension *n*,  une base de *E*.

Alors il existe un et un seul produit scalaire tel que B soit orthonormale dans le R-ev euclidien *E* muni de ce produit scalaire.

En effet, c’est l’application  définie par :

Pour tout , de composantes  et  dans B,

.

Exemple :

, muni de la base . On note  la base canonique de .

Soit .

Alors .

Ainsi,  est une base orthonormale pour le produit scalaire naturel, mais  n’en est pas une pour ce produit scalaire ; en revanche, c’en est une pour le produit scalaire .

* 1. Orthogonal d’un sous-espace vectoriel, projecteurs et symétries orthogonaux
     1. Orthogonal d’un sous-espace vectoriel (rappel)

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*.

On définit .

Alors  est un sous-espace vectoriel de *E*, et .

Démonstration :

Déjà, c’est un sous-espace vectoriel de *E* (vu dans le chapitre précédent).

* Si , alors , et on a bien .
* Si . On note *p* la dimension de *F*; ainsi, .

Soit  une base orthonormale de *F*.

On la complète en une base orthonormale  de *E*. Soit alors , de composantes  dans B.

On a alors les équivalences :



L’avant-dernière équivalence se justifie dans un sens en prenant, pour   et , et dans l’autre sens par linéarité de la deuxième variable.

Donc , donc  est bien supplémentaire de *F* dans *E*.

Conséquence :

Dans un espace euclidien, .

En effet, on a déjà vu que . De plus, en notant , on a :

, donc . D’où l’égalité.

* + 1. Projecteur orthogonal

Définition :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*.

Le projecteur orthogonal sur *F*  le projecteur sur *F* selon .

Pour , *p* le projecteur orthogonal sur *F*, alors  est appelée la projection orthogonale de *x* sur *F*.



Ainsi,  est l’unique élément de *F* tel que *x* s’écrive :

, où . (car , et )

Autrement dit,  est l’unique élément de *F* tel que . Ainsi, pour , .

* + 1. Distance d’un élément à un sous-espace vectoriel

Définition :

Soit *A* une partie non vide *E* et soit . Alors la distance de *x* à *A*, notée , est : .

La borne inférieure existe bien, car  est non vide (car *A* est non vide), et minorée (par 0).

(Définition : frontière = adhérence d’une partie, privée de l’intérieur)

Théorème :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*, soit *p* le projecteur orthogonal sur *F*.

Soit .

Alors  est l’unique élément de *F* tel que . Autrement dit, la distance de  est atteinte, en un et un seul point, qui n’est autre que .

Démonstration :

Soit .

Alors .

Or,  car  ; et  par définition de *p*.

Donc . Ainsi, d’après le théorème de Pythagore :



D’où , et il n’y a égalité que si  (car sinon )

* + 1. Symétries orthogonales

Ce sont les symétries par rapport à un sous-espace vectoriel *F*, selon .

Autrement dit :

La symétrie orthogonale par rapport à *F*  l’application .



Remarque : , où *p* est la projection orthogonale sur *F*.

Proposition :

Soit *f* une symétrie sur *E*. On a l’équivalence :

*f* est une symétrie orthogonale .

Symétrie quelconque :



Démonstration :

Soit *f* une symétrie par rapport à *F* selon *G*. (où *G* est tel que ).

Soit . Alors , et .

Donc  et .

Ainsi :

* Si , alors  vaudra toujours 0. Donc 
* Si , on peut trouver  tel que . Alors, en prenant , on aura trouvé *x* tel que . D’où l’équivalence.
  1. Formes linéaires et hyperplans
     1. Formes linéaires

Théorème :

Les formes linéaires sur *E* sont exactement les applications du type : , où . Plus précisément :

(1) Les applications du type  sont linéaires, et

(2) Si , alors il existe un et un seul élément *a* de *E* tel que . (on retrouve ainsi le fait que )

Démonstration :

Le premier point résulte de la linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable. Pour le deuxième :

Soit  une base orthonormale de *E*.

Soit .

Il existe alors  tels que, pour tout  de composantes  dans B, , avec  (on introduit en fait , matrice de *h* dans les bases B et (1)). D’où l’existence.

Unicité :

Si il existe  tels que  et , alors  (linéarité par rapport à la première variable).

Donc , d’où .

* + 1. Hyperplans

Soit *H* un hyperplan de *E*. Alors *H* est le noyau d’une forme linéaire sur *E*, *h*, non nulle (attention, il n’y a pas unicité !).

Or, il existe  tel que .

Ainsi, .

Donc  dirige la droite vectorielle . On dit que *N* est la normale à *H*: , ou encore , et que  est un vecteur normal à *H*.

Remarque :

Si  est une base orthonormale de *E*,

Si *H* a pour équation  dans B, alors le vecteur  de composantes  dans B est normal à *H*. En effet, l’équation "dit" : .

* + 1. Projection orthogonale sur un hyperplan

On considère un hyperplan *H*, un vecteur  normal à *H* et *p* le projecteur orthogonal sur *H*.

Soit . Alors , et .

Donc 

Ainsi, 

D’où , et, par conséquent :



Soit 

Conséquence :

Pour tout , .

* + 1. Réflexion

Une réflexion  une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition :

Etant donnés deux vecteurs *x*, *x*’ de *E*, distincts et de même norme, il existe une et une seule réflexion qui les échange.

Démonstration :

Existence :

Soit *H* l’hyperplan tel qu’un vecteur normal soit , et soit *f* la réflexion d’hyperplan *H*. On note enfin *p* la projection orthogonale sur *H*.



Et, de même, .

Unicité :

Supposons qu’il existe deux réflexions *f*, *g* d’hyperplans *F*, *G* telles que :



On a alors :

Déjà,  est normal à *F*. En effet :

Pour tout , on a déjà :



D’où .

De plus, pour tout  :

.

Donc .

De même, 

Donc , d’où .

* 1. Automorphismes orthogonaux
     1. Définition, théorème

Soit .



Démonstration :

 : évident ; si (1), alors 

 : supposons (2).

Soient . Alors :



 : supposons (1).

Soit  une base orthonormale.

Alors, pour tout 

 : il en existe puisque l’ensemble des bases orthonormales n’est pas vide.

 : supposons (4).

Soit  une base orthonormale telle que  soit aussi orthonormale.

Soient alors , de composantes  et  dans B.

Alors .

Et  car B’ est aussi orthonormale, et les composantes de  et  dans B’ sont  et  puisque *f* est linéaire (rappel : pour une application linéaire, )

Remarque :

Si une application *f* est un automorphisme orthogonal, alors c’est aussi un automorphisme.

En effet : si *f* est un automorphisme orthogonal, alors :

. Donc . Donc *f* est injective, donc bijective (puisque *E* est de dimension finie)

Définition, proposition :

On note  l’ensemble des automorphismes orthogonaux de *E*. Alors  constitue un sous-groupe de  des automorphismes de *E*. On l’appelle le groupe orthogonal de *E*. Les éléments de  sont aussi appelés des isométries vectorielles.

Démonstration :



* Si , alors  et  :

, et .

Exemple :

Les symétries orthogonales sont des éléments de 

* + 1. Matrices orthogonales

Théorème :

Soit B une base orthonormale de *E*. Soit , et .

Alors :

 les colonnes de *A* forment une base orthonormale de  muni de son produit scalaire naturel  *A* est inversible et 

Démonstration :





D’où le résultat.

Définition, proposition :

- Soit 

*A* est orthogonale  *A* est inversible et 

- L’ensemble des matrices carrées et orthogonales, noté  (ou , ou ), forme un sous-groupe de 

- Si B est une base orthonormale de *E*, si *f* est une application linéaire de *E* dans *E*, et si , alors 

- B étant une base orthonormale de *E*, l’application  est un isomorphisme du groupe  dans 

En effet :

Déjà,  est correctement définie, puisque pour ,  est bien orthogonale.



* C’est surjectif d’après le tiret précédent : pour , on trouve .
* C’est aussi injectif : 

Exemple :



* + 1. Déterminant d’un automorphisme orthogonal

Proposition :

Si , alors 

Si , alors 

Démonstration :

Si , on a alors :

, donc , soit , d’où 

Si  : soit , où B est une base orthonormale.

Alors  car *A* est orthogonale.

Définition, proposition :

On note  l’ensemble des éléments  tels que 

On note  l’ensemble des  tels que .

Alors  est un sous-groupe de , on l’appelle le groupe orthogonal spécial de *E*. Et  est un sous-groupe de , on l’appelle le groupe orthogonal spécial d’ordre *n* (attention,  n’est pas pour autant de cardinal *n*!)

Ces deux groupe sont isomorphes ; plus précisément, si B désigne une base orthonormale de *E*, l’application  définit, par restriction, un isomorphisme de  vers .

(Remarque :  n’est pas un sous-groupe, puisque si  et , alors  !)

Exemple :

Soit *f* une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel quelconque *F* de *E*. (on note *p* la dimension de *F*).

Alors  (puisque *f* conserve la norme)

On considère la matrice de *f* dans une base adaptée (le "début" dans *F*, le "reste" dans ) :



Ainsi, 

Vocabulaire :

Un élément de  est un automorphisme orthogonal direct / une isométrie vectorielle directe. (et indirect(e) pour les éléments de )

Ainsi :

* Les réflexions sont toujours indirectes ()
* Les symétries orthogonales par rapport à une droite (appelées aussi retournements) sont indirectes en dimension 2, directes en dimension 3.

Autre vocabulaire :

Les éléments de  s’appellent aussi des rotations.

* 1. Orientation et changement de base
     1. Orientation d’un R-ev *E* de dimension *n*.

Orienter *E*, c’est choisir une base B de *E*, décréter qu’elle est directe, et convenir qu’étant donnée une base B’ de *E*:

B’ est directe 

B’ est indirecte 

Ainsi, étant données deux bases B’ et B’’ de *E*, B’ et B’’ sont de même sens (c'est-à-dire toutes les deux (in)directes) si et seulement si 

En effet : , qui est positif si et seulement si les deux déterminants on même signe.

Exemples :

* En dimension 2 :

Si  est directe, alors  est indirecte,  est directe,  aussi.

(Les déterminants sont « multipliés par -1 » lorsqu’on échange deux vecteurs)

* En dimension 3 :

Si  est directe, alors  est directe,  est indirecte, et  directe.

On considère dorénavant *E* orienté.

Proposition :

Si  est une famille orthonormale de *E*, avec , on peut la compléter en une base orthonormée directe de *E*.

Démonstration :

On sait construire  base orthonormale. Ainsi, soit , soit  sera directe.

* + 1. Changement de base orthonormale

Proposition :

Soit  une base orthonormale de *E*.

Soit  une autre base de *E*, et *P* la matrice de passage de B à B’.

Alors B’ est orthonormale  *P* est orthogonale.

Plus précisément :

B’ est orthonormale de même sens que B 

B’ est orthonormale de sens contraire à B .

Démonstration :

*P* donne les composantes de B’ dans B, qui est orthonormale.

Donc, pour tout  (produit scalaire naturel des colonnes de *P*), et donc B’ est orthonormale si et seulement si les colonnes de *P* forment une base orthonormale de . (Par ailleurs, , d’où le sens…)

Ainsi, si B est une base orthonormée directe et si B’ est une autre base, *P* la matrice de passage de B à B’, alors B’ est une base orthonormée directe si et seulement si 

* + 1. Automorphismes orthogonaux et orientation

Proposition :

Soit , soit  une base orthonormale de *E*.

On sait déjà que  est une base orthonormale.

On a, plus précisément :

 est une base orthonormale de même sens que B.

 est une base orthonormale de sens opposé à B.

Démonstration :

Si , alors .

* + 1. Déterminant en base orthonormée directe

Proposition, définition :

Soit B une base orthonormée directe de *E*.

Soit  une famille de *n* vecteurs de *E*.

Alors  ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe B, et s’appelle le produit mixte de , qu’on note  ou .

Démonstration :

Si B, B’ sont deux bases orthonormées directes :

