Espaces affines

* 1. Définitions et notations
     1. Définition

Soit *E* un R-espace vectoriel.

Définition :

Un espace affine attaché à *E* est une couple  formé d’un ensemble  non vide et d’une loi externe + qui à un couple  de  associe un élément  de  vérifiant les axiomes suivants :



Si  est un espace affine attaché à *E*:

* On dit que *E* est l’espace vectoriel directeur de  ;
* Les éléments de  sont appelés des points, et ceux de *E* des vecteurs ;
* Si *E* est de dimension finie *n*, on dit que  est de dimension finie *n*.
  + 1. Translation

Soit  un espace affine attaché à *E*.

Pour chaque , l’application de  dans  qui à *M* associe  est appelée la translation de vecteur *u*, nous la noterons . Les axiomes (1), (2), (3) reviennent ainsi à dire que :



* + 1. Vecteur défini par deux point

Soit  un espace affine attaché à *E*.

Etant donnés deux points *A* et *B* de , l’unique vecteur tel que  est noté . Les trois axiomes, joints à cette définition, donnent alors les résultats suivants :



C’est en effet la définition de , possible grâce à l’axiome (3).

En plus, l’axiome (1) donne, en particulier : .

* + Relation de Chasles : .

En effet, d’après l’axiome (2) : .

 ; en effet, .

* + 1. Exemples et visualisation

On considère un R-ev *E* de dimension 2, une base  de *E* et  un plan (ici le plan de la feuille) :



Exemple : Si *E* est un R-ev, alors *E* est naturellement un espace affine attaché à *E*, où la loi "+" externe est la même que la loi + interne. En effet :





* 1. Repères d’un espace affine de dimension finie

Dans ce paragraphe,  désigne un espace affine attaché à *E* de dimension finie *n*.

* + 1. Définitions

Définition :

Un repère de  est un couple  formé d’un point *O* de  et d’une base  de *E*.

Considérons un repère  de , avec .

Le point *O* est appelé origine du repère, et les vecteurs  sont appelés les vecteurs de base du repère. Pour tout point *M* de , les composantes du vecteur  dans la base B sont appelées les coordonnées de *M* dans le repère R. Ainsi, les coordonnées  de *M* dans R son caractérisées par l’égalité :

. Lorsqu’il n’y a pas d’ambiguïté sur le repère R, on note .

Remarque :

Si, dans le repère R,  et , alors, dans la base B, .

En effet, 

Les points étant repérés par leurs coordonnées, on peut aussi définir la notion d’équation dans un repère :

Si *f* est une fonction réelle définie sur une partie *K* de , la partie de  d’équation  dans R est par définition l’ensemble des points *M* de  dont les coordonnées  dans R vérifient :

 et .

* + 1. Changement de repère

Soient  et  deux repères de , soit *P* la matrice de passage de B à B’, et soit *B* la colonne des coordonnées de *O*’ dans R. Alors si *M* est un point de , si *X* est la colonne des coordonnées de *M* dans R, et si  est la colonne des coordonnées de *M* dans R’, on a la relation : .

Démonstration :

 est la colonne des coordonnées de  dans R’, donc selon les formules de changement de base,  est la colonne des coordonnées du même vecteur  dans R, et comme , la colonne des coordonnées de  dans R est donc .

* 1. Barycentres

Dans ce paragraphe,  désigne un espace affine attaché à un espace vectoriel *E*.

* + 1. Définition

Théorème et définition :

Soit  une famille de *n* points de , et soit  une famille de *n* réels de somme non nulle. Alors il existe un unique point *G* tel que , il est appelé le barycentre des points pondérés .

Démonstration :

Soit *O* un point quelconque de .

Alors, pour tout point *M* de , on a :



Comme , il existe bien un unique point *G* comme voulu, il est défini par l’égalité : 

Remarque :

Il résulte de cette démonstration que si , alors l’application qui à tout point *M* de  associe  est constante.

* + 1. Propriétés

D’abord, on remarque que la formule (1) établie précédemment, valable pour tout point *O* de , permet d’obtenir aisément, lorsque  est de dimension finie, les coordonnées des  à l’aide des coordonnées des  dans un repère d’origine *O*.

Remarquons de plus que cette formule montre que le barycentre des  est inchangé lorsqu’on modifie l’ordre des , et aussi lorsqu’on multiplie tous les  par un même coefficient non nul. On peut ainsi se ramener au cas où les  sont de somme 1.

Proposition (« associativité » du barycentre) :

Soit  une famille de *n* point pondérés de , avec .

Supposons que *m* est un entier tel que  et .

On introduit alors le barycentre *H* des .

Alors le barycentre *G* des  est aussi celui de  et des .

En effet :

.

* 1. Sous-espaces affines

 désigne toujours un espace affine attaché à un espace vectoriel *E*.

* + 1. Généralités

Définition :

Soit F une partie de . On dit que F est un sous-espace affine de  lorsque F est non vide et est stable par « barycentration », c'est-à-dire lorsque tout barycentre de points de F est encore un point de F.

Visualisation en dimension 2 :

* Si on choisit un point de , tout barycentre de ce point est encore ce point. Donc F est réduit à un singleton.
* Si on prend deux points *A* et *B* distincts, on doit avoir toute la droite qui passe par ces deux points. (et inversement, si un système de points est sur la droite, le barycentre y est alors aussi).



Ici :

. Donc *M* est barycentre de  et  (ou  et ) :

, soit 

* Avec trois points, on obtient une droite ou un plan (une droite si les vecteurs formés par les trois points sont liés deux à deux).

Proposition :

Soit F un sous-espace affine de .

Alors l’ensemble des vecteurs , *M* et *N* décrivant F, est un sous-espace vectoriel de *E*, appelé la direction de F. On le note .

Ainsi, on vérifie aisément que F est un espace affine attaché à . (Les 3 axiomes à vérifier sont des restrictions de ceux correspondant dans , et par construction, )

Démonstration :

Notons .

Alors déjà *F* contient le vecteur nul, car , où *A* est un point quelconque de F, qui est non vide.

Soient , et . On introduit  tels que  et 

Soit  tel que . Alors .

Donc *M* est barycentre de ,  et , donc , soit .

Exemple en dimension 2 :



Théorème :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*, et soit *A* un point de . Alors il existe un et un seul sous-espace affine de  contenant *A* et de direction *F*, c’est l’ensemble, qu’on note , des points , *u* décrivant *F*, on encore l’ensemble des points *M* de  tels que .

Démonstration :

Notons . Montrons alors que F est un sous-espace affine de  passant par *A* et de direction *F*.

* Déjà, F contient *A* car .
* F est un sous-espace affine de , car si *M* est un barycentre de points  de F, alors  est combinaison linéaire des , qui sont dans *F*. Donc , donc 
* La direction de F est *F*: en effet, si *M* et *N* sont dans F, alors , et  (donc ), et inversement, pour ,  est dans F donc  est dans la direction de F, d’où l’égalité.

Supposons maintenant que F’ est un sous espace affine de  contenant *A* et de direction *F*:

* Déjà, , puisque si , alors , donc 
* Ensuite, . En effet, si , alors , donc , où , et alors , donc *M* est le barycentre de ,  et . Donc 

D’où l’égalité, et donc l’unicité.

Remarque :

Si F est un sous-espace affine de , *A* un point de F, alors .

En effet :

Selon le théorème, si on note , alors .

Si , alors  puisque . Donc  avec 

Si *u* s’écrit , où , alors  car .

Vocabulaire :

Un sous-espace affine dont la direction est de dimension finie *p* est dit de dimension *p*.

Un sous-espace de dimension 1 est appelé une droite affine, et un sous-espace de dimension 2 est appelé un plan affine.

Un sous-espace affine de dimension 0 n’est rien d’autre qu’un singleton.

* + 1. Parallélisme et inclusion entre deux sous-espaces affines

Proposition :

Soient F et G deux sous-espaces affines de , de directions respectives *F* et *G*.

Si , alors .

Inversement, si  et  est non vide, alors .

En effet :

Soient F et G deux sous-espaces affines de , notons , .

* Si , alors 
* Si  et  est non vide : soit .

Alors .

Deux sous-espaces affines sont dits parallèles (au sens fort) lorsqu’ils ont la même direction, et plus généralement sont dits parallèles (au sens faible) lorsqu’il y a une inclusion entre leurs directions. On peut souvent se permettre de ne pas préciser : si par exemple on parle d’un plan et d’une droite parallèles, il s’agit bien évidemment de parallélisme au sens faible.

Il résulte de la proposition précédente que si deux sous-espaces affines sont parallèles au sens fort, alors ils sont soit disjoints soit égaux.

On remarque aussi que, en dimension finie, une inclusion entre deux sous-espaces affines de même dimension finie *p* implique leur égalité.

En effet, en introduisant les mêmes notations que dans la proposition :

Si , alors  ; or, , donc .

Donc , et  (car F est non vide et ), donc .

* + 1. Intersection entre deux sous-espaces affines

Proposition :

Soient F, G deux sous-espaces affines de , de directions respectives *F* et *G*. Alors  est soit vide, soit un sous-espace affine de  de direction .

Démonstration :

Supposons .

Soit alors . Alors :





Donc 

On reconnaît le sous-espace affine de  passant par *A* et de direction le sous-espace vectoriel  de *E*.

Proposition (précision de certains cas par rapport à la proposition précédente) :

Soient F, G deux sous-espaces affines de , de directions respectives *F* et *G*.

* Si , alors  est soit vide soit un singleton
* Si , alors  n’est pas vide.
* Si , alors  est vide ou .

Démonstration :

* Si  n’est pas vide, alors c’est un sous-espace vectoriel de dimension la dimension de , c'est-à-dire de dimension 0.
* Supposons que .

Soient . Alors .

Soit . Alors .

Mais .

Donc .



* C’est la proposition vue dans le sous paragraphe précédent.

Il résulte de cette proposition que si F et G sont deux sous-espaces affines de  de directions supplémentaires, alors  est un singleton.

* + 1. Equations et paramétrages en dimension 2 ou 3.
       1. En dimension 2

Ici,  désigne un espace affine de dimension 2, qu’on munit d’un repère  (On peut ne pas mettre les parenthèses : )

Paramétrage d’une droite :

Soit D une droite de , définie par un point  et sa direction *F*.

Alors 

Supposons que , où .

Alors .

Soit .

Ou encore, avec  : 

Remarque :

Si D est donnée par deux points *A*, *A*’ distincts.

On peut se ramener au cas précédent avec  ou exploiter les barycentres :



Avec .

Equation :

Soit D passant par *A* de direction *F*.

*F* est une droite vectorielle en dimension 2, soit un hyperplan, donc admet dans  une équation du type . Alors :



Inversement, une partie de  admettant une équation du type , où  est la droite affine de direction  passant par *A* où  est tel que .

Remarque :

Si D passe par  et est dirigée par , alors :



* + - 1. En dimension 3

- Représentation paramétrique de droite :

Soit D passant par  dirigé par 

Alors :



- Pour les plans :

Soit P passant par  de direction .

Alors :



Inversement, si  avec , alors P est un plan de direction  passant par *A* où  est tel que .

Paramétrage d’un plan, obtention pratique d’une équation de plan P donné par  et ,  engendrant la direction de P :



Ou alors :



* 1. Applications affines

 et  désignent ici des espaces affines attachés à des espaces vectoriels *E* et *E*’.

* + 1. Généralités

Définition :

Soit *f* une application de  dans . On dit que *f* est affine lorsque *f* conserve les barycentres, c'est-à-dire lorsque l’image d’un barycentre de points de  est le barycentre des images de ces points, affectés des mêmes coefficients.

Proposition, définition :

Soit *f* une application affine de  dans . Il existe une unique application  de *E* dans *E*’ telle que .

Cette application est linéaire et est appelée la partie linéaire de *f*, notée 

Démonstration :

Dans cette démonstration, on convient que pour un point de  désigné par une lettre, la même lettre avec un « prime » désigne son image par *f*.

* Déjà, l’égalité  équivaut à l’égalité .

Comme tout vecteur de *E* s’écrit , où , il nous faut donc montrer que  ne dépend que du vecteur  et non pas des points *M* et *N*.

Supposons alors que *M*, *N*, *P*, *Q* sont quatre points de  tels que .

On a alors , donc *Q* est barycentre de .

Donc *Q*’ est barycentre de , puisque *f* est affine.

Donc .

On introduit ainsi l’unique application  de *E* dans *E*’ qui à un vecteur *u* de *E* associe le vecteur , où *M* et *N* sont deux points de  tels que .

* Alors  est linéaire :

Soient *u*, *v* deux vecteurs de *E*, et  un réel.

On note *O*, *M*, *N*, *P* des points de  tels que ,  et .

On a alors . Donc *P* est le barycentre de , donc *P* est barycentre de .

Donc 

Soit .

Théorème :

Soit *A* un point de , *A*’ un point de  et  une application linéaire de *E* dans *E*’.

Il existe une unique application affine *f* de  dans  de partie linéaire  et telle que , et c’est l’application *f* définie par .

Démonstration :

Compte tenu de la proposition précédente, si *f* est affine, de partie linéaire  et est telle que , alors . Soit alors *f* définie ainsi.

Déjà,  car  est linéaire. Donc .

De plus, *f* est affine : si *M* est le barycentre des , avec , on a, toujours en notant avec des « primes » les images des points de  par *f*:

. Donc *M*’ est le barycentre des .

Enfin, la partie linéaire de *f* est  :

Soit *u* un vecteur de *E*, notons *M* le point de  tel que  et *M*’ son image par *f*. Alors l’image de *u* par la partie linéaire de *f* est , qui n’est autre que , soit .

Remarque :

Il en résulte que, étant donné un point *A* quelconque de , une application *f* de  dans  est affine si et seulement si l’application  définie par  est linéaire, et dans ce cas *f* est l’application affine de partie linéaire  qui envoie *A* sur *f*(A).

* + 1. Exemples
* Les applications , *a* et *b* décrivant R, sont des applications affines de l’espace affine R vers lui-même, et ce sont les seules.

En effet :

L’application  est l’application qui envoie 0 sur *b* et de partie linéaire , et c’est la seule possibilité (, et les applications linéaires de R dans R sont les )

* Soit P un plan affine, muni d’un repère . Les translations sont exactement les applications affines de partie linéaire  (valable en toute dimension)

Démonstration :

Déjà, une translation est bien affine puisque si un point *M* est barycentre des , *i* décrivant un ensemble *I* fini, en notant  les images par la translation des , .

Donc une translation est stable par barycentration, donc est affine.

Soit *f* une translation de vecteur ,  sa partie linéaire.

Soit *A* un point de , et  (donc ).

Soit alors un autre point *M* de , *M*’ sont image et  tel que . On a :

, et , soit 

Donc .

Or, tout vecteur de *E* s’écrit , où *M* est un point de . Donc .

Réciproquement, soit *f* une application affine telle que sa partie linéaire soit .

Soit *A* un point de , et .

Alors, pour tout point *M* de , on a :

.

Donc *f* est la translation de vecteur .

* + 1. Applications affines et composition

Proposition :

Soient ,  deux applications affines.

Alors  est affine, et 

Démonstration :

Soit , .

Soit 



Ainsi, 

Ce qui montre que  est affine et 

Proposition :

Soit . Alors :

*f* est injective  est injective,

*f* est surjective  est surjective,

*f* est bijective  est bijective,

Et dans ce dernier cas  est affine et 

Démonstration :

Soit *f* une application affine, et  sa partie linéaire.

Supposons *f* injective. Soient . Supposons que . Soit *A* un point de . Alors . Donc , donc, comme *f* est injective, , donc , d’où , donc  est injective.

Supposons *f* non injective. Soient alors *A*, *A*’ deux points distincts de  tels que . Alors . Donc , et comme , on a , c'est-à-dire que  n’est pas injective.

D’où la première équivalence.

Supposons *f* surjective. Soit . Soient  tels que . Alors, comme *f* est surjective, il existe  tels que . Alors . Donc . On a donc trouvé  (à savoir ) tel que . Donc  est surjective.

Supposons  surjective. Soit alors , . Soit alors . Comme  est surjective, il existe  tel que . Alors . On a donc trouvé  (à savoir ) tel que . Comme ce résultat est valable pour tout , *f* est bien surjective.

D’où la deuxième équivalence, puis la troisième qui découle des deux autres.

Supposons *f* bijective. Montrons que  est affine, et que .

Comme *f* est bijective,  l’est aussi, et on introduit alors . Soit *A* un point de , et . Soit alors *g* l’application affine de  dans  telle que  et de partie linéaire . Ainsi, 

Alors, pour tout  :



Et, pour tout  :



Donc . Donc , et comme *g* est affine de partie linéaire ,  est bien affine, et .

Proposition, définition :

On note  l’ensemble des applications affines bijectives de  dans . Alors  est un groupe, appelé le groupe affine de .

(La démonstration est immédiate, compte tenu des propositions précédentes).

* + 1. Application affine, et sous-espace affine

Théorème :

Soit  affine, de partie linéaire .

* Soit F un sous-espace affine de , de direction *F*.

Alors  est un sous-espace affine de , de direction 

* Soit G un sous-espace affine de , de direction *G*.

Alors  est vide ou est un sous-espace affine de , de direction .

Démonstration (on se place à chaque fois dans les hypothèses du théorème) :

* Soit *M* le barycentre de , *i* décrivant *I* fini, où les  et . Montrons que .

Soit  une famille finie de points de  telle que  (qui existe puisque les  sont dans ). Soit *A* le barycentre des .

Alors, comme *f* est affine,  est le barycentre des , c'est-à-dire des . Donc, par unicité du barycentre, . Donc .

Donc  est stable par barycentration et non vide, donc affine.

Soit . Alors .

Montrons que  :

- Soit 

Soit  tel que .

Soient  tels que  et 

Alors , et .

Donc .

Donc , c'est-à-dire , d’où une première inclusion.

- Soit 

Soit  tel que .

Soit  tel que . On doit alors montrer que .

Soit  tel que , et  tel que .

Alors . Donc  (puisque ).

Donc , d’où l’autre inclusion, et l’égalité.

* Supposons que  n’est pas vide :

Soit *M* le barycentre de , *i* décrivant *I* fini, où les  et . Montrons que .

Alors  est le barycentre des , car *f* est affine.

Donc , car G est stable par barycentration.

Donc .

Donc  est stable par barycentration et non vide, donc c’est un sous-espace affine de .

Donc  est soit vide, soit un sous-espace affine de .

Supposons ici que  est non vide (c’est donc un sous-espace affine de ).

Soit . Alors .

Montrons que .

- Soit .

Soit  tel que .

On note , .

Alors . Donc .

Or,  et  (car ).

Donc . Donc . D’où une première inclusion.

- Soit maintenant .

Soit  tel que . Posons  (ainsi, ).

Alors , soit , d’où .

De plus, . Donc .

D’où l’autre inclusion et l’égalité.

* 1. Applications affines particulières

 désigne un espace affine directeur de *E*.

* + 1. Translations

Rappel :

Soit . La translation de vecteur  est l’application .

Proposition :

L’ensemble des translations sur  est un sous-groupe de , noté .

 est exactement l’ensemble des applications affines de  dans  dont la partie linéaire est 

Démonstration :

On a déjà vu que l’ensemble des translations sur  est l’ensemble des applications affines de partie linéaire l’identité.

De plus, l’application  est évidemment un morphisme injectif du groupe  vers le groupe . Donc l’image de ce morphisme, c'est-à-dire , est un sous-groupe de  (et  est isomorphe à )

* + 1. Homothéties

Définition :

Soit , et soit . L’homothétie affine de centre  et de rapport , qu’on note ici  est l’application :  (c'est-à-dire que l’image de *M* est le point *M’* tel que )

Proposition :

* Pour , on a l’équivalence :

*f* est une homothétie affine  *f* est affine, admet au moins un point fixe et la partie linéaire de *f* est une homothétie vectorielle.

* Pour  et , on a :
* Si , alors  est bijective et .
* Si , .
* Si ,  a un unique point fixe, à savoir .

En effet :

* Si *f* est une homothétie affine de centre  et de rapport  :

Alors *f* est bien affine, admet comme point fixe  (car ), et est de partie linéaire , qui est bien une homothétie vectorielle.

Réciproquement, si *f* est affine, admet au moins un point fixe  et la partie linéaire  de *f* est une homothétie vectorielle de rapport , alors, pour tout  :



Donc *f* est bien une homothétie affine (de rapport  et de centre )

* Si , alors  est bien définie, et on a, pour tout  :



(Où on a noté  l’homothétie vectorielle de rapport )

Donc , et de même . Donc  est inversible, d’inverse , donc est bijective.

Si , alors, pour tout  :  donc .

Si . Soit .

Si , alors , soit , donc , donc  car . Donc . Réciproquement,  est bien fixe par .

Cas particulier :

L’homothétie de centre  et de rapport -1 est aussi appelée la symétrie par rapport à .

Théorème :

L’ensemble des applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport non nul est un sous-groupe de , constitué de la réunion de l’ensemble des translations sur  et de l’ensemble des homothéties affines de rapport non nul.

Ce sous-groupe est appelé le groupe des homothéties–translations de , noté .

Démonstration :

Notons  l’ensemble des applications affines de  dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport non nul.

* Déjà, il est facile de voir que  est contenu dans , contient , est stable par  et passage à l’inverse (d’après la proposition précédente), donc c’est bien un sous-groupe de .
* Ensuite,  contient évidemment  et l’ensemble des homothéties affines de rapport non nul.
* Soit maintenant  :

Soit  tel que la partie linéaire de *f* soit .

* Si , *f* est une translation.
* Si , montrons que *f* est une homothétie :

Selon la propriété précédente, il suffit de montrer que *f* admet un point fixe.

Soit , posons . Alors, pour tout  :

.

Donc  est barycentre de .

Donc *f* a bien un point fixe, et est bien une homothétie.

Remarque :

L’ensemble des homothéties affines de  n’est pas stable par  :

En effet, si , et si , alors  est une translation puisque sa partie linéaire est l’identité, et de vecteur non nul car l’image de  est :

 car .

Remarque :

Si , l’image d’un sous-espace affine F de  par *f* est un sous-espace affine F’ parallèle à F. (puisque si on note *F* la direction de F, *F*’ celle de F’, et  la partie linéaire de *f*, alors ).

Application : Thalès

Soient  et  deux droites sécantes en  d’un plan affine.

Soient ,  de sorte que .

Alors si  est tel que , on a .

Démonstration :

L’homothétie *h* de centre  et de rapport  envoie  sur .

L’image de  par *h* est  (car c’est une droite parallèle à  qui doit passer par )

L’image de  par *h* est  (car c’est une droite parallèle à  qui passe par )

Donc, puisque , on a , donc , d’où .

* + 1. Projections

Proposition et définition :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces supplémentaires de *E*.

Soit F un sous-espace affine de  de direction *F*.

Pour chaque , notons  le sous-espace affine de  passant par *M* et de direction *G*, alors  rencontre F en un unique point *M’*.

L’application , de  dans , ainsi définie, s’appelle la projection affine sur F suivant la direction *G*, et on a les propriétés :

* *p* est affine, sa partie linéaire est la projection vectorielle sur *F* selon *G*.
* L’ensemble des points fixes par *p* est F.
* 

Démonstration :

* Soit . Alors  est bien un singleton, puisque  (vu en IV C)). La définition de *p* a bien un sens.
* Soit . Alors  et , donc , donc .

Soit maintenant , quelconque. Notons .

Alors  et 

Donc , où  est la projection vectorielle sur *F* parallèlement à *G*, et



Donc *p* est affine, de partie linéaire .

* On a vu que si , alors .

Réciproquement, si , alors comme  par définition, on a .

* Comme  et comme les éléments de F sont invariants par *p*, on a bien .

Dessin illustrant la proposition la définition, et sa démonstration en dimension 3 lorsque F est un plan affine (et donc *G* une droite vectorielle) :



Remarque pratique :

Le point *M’* tel que  est caractérisé par  et , ou encore :

.

Exemple :

Dans  affine rapporté à son repère canonique, on veut l’image de  par la projection sur le plan P d’équation  parallèlement à la direction du vecteur .

On écrira :

Soit  l’image cherchée de *M*.

Alors  et  est colinéaire à .

Donc  et il existe  tel que 

D’où , donc 

Ainsi, 

* + 1. Symétries

Soit F un sous-espace affine de , de direction *F*. Soit *G* un supplémentaire de *F* dans *E*. La symétrie affine par rapport à F selon la direction *G* est l’application qui à  associe le point *M’* tel que  où *H* désigne la projection de *M* sur F selon *G*.

Proposition :

Cette application est affine, et sa partie linéaire n’est autre que la symétrie vectorielle par rapport à *F* selon *G*.

Démonstration :

Soit . Déjà, .

Soit  définie par : ,

C'est-à-dire telle que  (où )

Où encore telle que .

On a alors :

, et comme ,  est l’application qui à  associe .

Donc  est linéaire, c’est la symétrie par rapport à *F* selon *G*, et *f* est affine, de partie linéaire .

* + 1. Affinités

On suppose ici  de dimension finie.

Définition :

Soit H un hyperplan de  de direction *H*.

Soit *D* une droite vectorielle non contenue dans *H* (ainsi, )

Soit . L’affinité (ou encore la dilatation) d’hyperplan H, de direction *D* et de rapport  est l’application  où *M’* est tel que  où *m* est la projection de *M* sur H parallèlement à *D*.

Dessin en dimension 3, étude :



Soit *f* l’affinité d’hyperplan H, de direction *D*, de rapport . Soit *p* la projection affine sur H parallèlement à *D*:

* Déjà, les points de *H* sont invariants par *f*.

En effet, si , le point  coïncide avec *M*, donc  est tel que .

* Soit maintenant , soit , notons  et .

Alors par définition, .

Si on note  l’application linéaire : 

(C'est-à-dire que  où  est la projection vectorielle sur *H* parallèlement à *D* et  la projection vectorielle sur *D* parallèlement à *H*)

On a alors : , et donc 

Donc 

Donc *f* est affine, et sa partie linéaire est .

* Comme , on voit facilement que  est bijective, donc que *f* l’est.
* De plus, si , *f* est évidemment l’identité, mais pour  :

.

Conclusion :

Soit *f* l’affinité d’hyperplan H, de direction *D* et de rapport . Alors *f* est affine et bijective, et si , H est l’ensemble des points fixes par *f* (si , ).

Construction géométrique :

En reprenant les notations précédentes, on veut construire l’image *M’* d’un point *M* connaissant H, un point  et son image *A*’ par *f*.

Comme ,  et la droite  a la direction *D*.

* Si  :

Comme *H* est invariant par , on a :

, d’où on tire *M’*:



* Si  n’est pas parallèle à H.

Soit *I* le point d’intersection de  et H.

Alors l’image de la droite  par *f* est la droite  (car c’est une droite qui passe par  et ).

Notons alors  la droite passant par *M* de direction *D*.

On a :  et  (car ).

Si  et  sont sécants, cela détermine *M’*, sinon c’est que  :

On détermine alors d’abord l’image d’un point , puis on détermine l’image de *M* en utilisant *B* et *B’*…

* + 1. Une remarque générale en dimension finie

Soit  un espace affine de dimension finie *n* et de direction *E*.

Soit  un repère de  et soit  la base correspondante de *E*.

Les applications affines de  sont les applications déterminées par des formules du type  où  et .

Ce qui correspond, sur les coordonnées dans R, à de formules du type :

 où 

* 1. Parties convexes d’un espace affine

 désigne toujours un espace affine.

Définition :

Soient . Le segment  est l’ensemble des barycentres de *A* et *B* affectés de coefficients positifs.

Ainsi, .

En effet, pour tout  :



Définition :

Soit *C* une partie de . On dit que *C* est convexe lorsque :

.

Proposition :

Soit *C* une partie de .

*C* est convexe si et seulement si tout barycentre de points de *C* affectés de coefficients positifs est dans *C*.

Démonstration :

 : c’est un cas particulier avec seulement le barycentre de deux points.

 : Supposons *C* convexe.

Montrons par récurrence que, pour tout , « tout barycentre de *n* points de *C* affectés de coefficients positifs est dans *C*. » ()

Pour , cela correspond à la définition de la convexité.

Soit . Supposons .

Soient maintenant   points de *C* affectés de coefficients positifs (non tous nuls). Soit  le barycentre des *n* premiers. Alors, par hypothèse de récurrence, . De plus, le barycentre de  est le barycentre de  et , donc appartient à *C* car  et . Ce qui achève la récurrence.

Proposition :

Toute intersection de convexes est convexe.

En effet :

Soit  une famille de convexes indexée par un ensemble *I* quelconque.

Notons .

Soient . Alors , donc , donc .

Donc *C* est convexe.

Définition, proposition :

On définit l’enveloppe convexe d’une partie P de  comme l’intersection de tous les convexes qui contiennent P. C’est le plus petit convexe contenant P.

La définition a bien un sens, puisque l’ensemble  des convexes contenant P n’est pas vide (il contient déjà ).

C’est bien le plus petit, puisque si un convexe *C* contient P, il contient nécessairement l’enveloppe convexe puisqu’il appartient à  (puisque ).

Proposition :

L’image d’un convexe par une application affine est un convexe.

L’image réciproque d’un convexe par une application affine est un convexe.

Résulte de la conservation des barycentres par une application affine.

Exemples :

Un sous-espace affine de  est bien sûr convexe.

Un disque plein de  (ensemble des ) est convexe.

Demi-espaces (ouverts) limités par un hyperplan :

On suppose  de dimension finie *n*, muni d’un repère R.

Soit H l’hyperplan d’équation  dans R.

Soit  l’ensemble des points de  dont les coordonnées  vérifient :



Et soit  l’ensemble des points de  dont les coordonnées  vérifient :

.

Alors  et  sont convexes.

Démonstration pour  :

Soient . Les  s’écrivent  avec , et en reportant dans  l’expression correspondante des coordonnées de *M* en fonction de *t*, on obtient une fonction affine de *t* (du type ), donc une fonction monotone de *t*. Comme cette fonction est par hypothèse strictement positive en  et , elle est donc strictement positive sur tout , d’où la convexité de .

Remarque :

Les demi-espaces fermés limités par H sont bien sûr aussi convexes (il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges)

Remarque :

En reprenant l’argument précédent et en utilisant cette fois la continuité de la fonction affine de *t* introduite, on montre que tout segment joignant un point de  à un point de  doit couper H.