Espaces vectoriels de type fini

*E* désigne ici un K-ev (où K est un sous corps de C)

* 1. Les théorèmes fondamentaux
     1. Existence de base

Théorème :

On suppose que *E* admet une famille génératrice finie *g*. Alors, de *g*, on peut extraire une base de *E*.

Démonstration :

Montrons par récurrence que, pour tout , « si *E* admet une famille génératrice *g* de cardinal *m*, alors, de *g*, on peut extraire une base de *E* » (P(*m*))

* P(0) : Si *E* admet une famille de cardinal 0, c’est que  et la famille vide est une base de *E*.
* P(1) : Si *E* admet une famille génératrice de cardinal 1, disons  :
* Si , alors , et  est alors une base de *E*, extraite de *g*.
* Si ,  est une famille libre et génératrice de *E*, extraite de *g* (car égale à *g*).
* P(2) : Si *E* admet une famille libre et génératrice de cardinal 2, disons  :
* Si  est libre, alors c’est une base de *E*, extraite de *g*.
* Si elle ne l’est pas, alors l’un des , disons , est combinaison linéaire des « autres » (c'est-à-dire ). Alors  est génératrice de *E*. D’après P(1), on peut donc en extraire une base de *E*.
* Soit . Supposons P(*m*). Montrons . Si *E* admet une famille génératrice de cardinal , disons  :
* Si  est libre, alors elle est une base de *E*, extraite de *g*.
* Si elle ne l’est pas, alors l’un des , disons  est combinaison linéaire des autres. Alors  est génératrice de *E*. D’après P(*m*), on peut donc en extraire une base de *E*, ce qui achève la récurrence.

Conséquence :

1. Tout K-ev de type fini admet une base (finie)
2. « théorème d’extraction de base » : de toute famille génératrice finie d’un   
   K-ev, on peut extraire une base (finie) de ce K-ev.
   * 1. Dimension

Théorème et définition :

Soit *E* un K-ev de type fini. Alors toutes les bases de *E* ont le même cardinal, il est appelé la dimension de *E*, noté .

Démonstration :

Lemme :

Pour tout entier ,  vecteurs qui sont combinaisons linéaires de *n* vecteurs de *E* forment toujours une famille liée.

En effet, montrons ce lemme par récurrence sur *n*:

* Pour  : « 1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié ». C’est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c’est 
* Pour  : « 2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée ». Si  et , alors  est liée :

Si , alors . Sinon . Donc  et  sont colinéaires.

* Soit , supposons le résultat vrai pour .

Considérons  vecteurs , combinaisons linéaires de *n* vecteurs . On a donc des scalaires  avec  et  tels que :



* Si , alors  sont combinaisons linéaires des  vecteurs . Par hypothèse de récurrence,  est liée. Donc  l’est aussi.
* Si l’un des , pour  n’est pas nul, disons  (sinon on échange les lignes), alors les transformations  pour  donnent :



Les vecteurs  forment donc une famille liée puisque ce sont *n* vecteurs combinaisons linéaires de  (hypothèse de récurrence). Il existe donc des scalaires  non tous nuls tels que . Donc  avec , ce qui prouve que  est liée car au moins l’un des  est non nul, ce qui achève la récurrence.

Maintenant :

Soient B, B’ deux bases (finie) de *E*, notons *m*, *n* leur cardinal.

* B est génératrice de *E*. donc chacun des *m* vecteurs de B’ est combinaison linéaire des *n* vecteurs de B. donc  (sinon, selon le lemme, B’ serait liée)
* De même, . Donc 

Exemple important :  est de dimension *n*: on en connaît une base de cardinal *n* (la base canonique)

Remarque :

* Si *E* est de dimension 0, alors 
* Si *E* est de dimension 1, alors *E* est une droite vectorielle.

Vocabulaire : "*E* de type fini" = "*E* de dimension finie".

Théorème « de la base incomplète » :

Soit *E* un K-ev de dimension finie *n*. Alors toute famille libre de *E* peut être complétée en une base de *E*.

Démonstration :

Soit *L* une famille libre de *E*.

* Si *L* est vide, il suffit de la compléter avec une base de *E*.
* Sinon, , où 

Soit  une base de *E*.

* Si *L* est génératrice de *E*, alors *L* est une base de *E*.
* Sinon, l’un au moins des  n’est pas combinaison linéaire de  (car sinon *L* serait génératrice). Soit alors  tel que . Alors la famille  est libre. Si elle est génératrice, c’est une base de *E*. Sinon, on recommence. Au bout d’un moment, on obtient une famille libre et génératrice (puisque, au pire,  est génératrice).

Conséquence du théorème :

Soit *E* un K-ev de dimension *n*. Alors :

1. Les familles libres de *E* ont au plus *n* vecteurs.
2. Si une famille libre de *E* est de cardinal *n*, alors c’est une base de *E*.

Remarque : la démonstration du théorème montre que, pour compléter une famille libre en une base de *E*, on peut imposer de piocher les éléments qui complètent dans une base, fixée d’avance, de *E*.

Conséquence du théorème « d’extraction de base » :

Soit *E* un K-ev de dimension *n*. Alors :

1. Les familles génératrices de *E* sont de cardinal .
2. Si une famille génératrice de *E* est de cardinal *n*, alors c’est une base de *E*.

Théorème :

Soit *E* un K-ev. Alors :



Démonstration : (les deux premières équivalences sont des rappels)

 : Evident, l’ensemble est majoré par 

 : Supposons que le cardinal des familles libres de *E* est majoré. L’ensemble des cardinaux des familles libres est donc une partie non vide (contient 0) et majorée de N. On note *n* le maximum de cette partie.

Soit alors une famille *L* de cardinal *n*.

* Si , alors  car  est la seule famille de cardinal 0.
* Sinon, . Alors cette famille est génératrice, car sinon on pourrait trouver  qui n’est pas combinaison linéaire des , et ainsi la famille  serait libre de cardinal , ce qui contredit la définition de *n*.

Théorème :

Soit *E* un K-ev de dimension finie *n*.

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*.

Alors *F* a une dimension finie et , et si elle vaut *n*, alors 

Démonstration :

* Les familles libres d’éléments de *F* sont des familles libres d’éléments de *E*. Donc leur cardinal est majoré par *n*. Donc *F* est de dimension finie  (puisque si  est une base de *F*, alors c’est aussi une famille libre de *E*, donc )
* Si , alors soit  une base de *F*. C’est donc une famille libre de *E* de cardinal . C’est donc une base de *E*. Donc .

Théorème :

Soit *E* un K-ev de dimension finie *n*. Alors tout sous-espace vectoriel de *E* admet un supplémentaire dans *E* (mais pas un seul en général).

Démonstration :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*.

* Si ,  est supplémentaire de *F*. (et vice-versa)
* Sinon, *F* est de dimension finie *p* avec . Soit  une base de *F*. C’est aussi une famille libre de *E*. on peut donc la compléter en une base  de *E*. On pose alors . Alors *G* est un supplémentaire de *F* dans *E*. En effet :
* Soit . Donc . (car  est génératrice de *E*) C’est vrai pour tout . Donc .
* Montrons maintenant que la somme est directe, soit que  :

Soit , alors  et . Donc . Comme la famille  est libre, . Donc .

Donc . Donc .

Donc 

* 1. Rang d’une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, *E* est un K-ev.

Définition :

Soit F une famille de vecteurs de *E*. Le rang de F est : .

Exemples :

* Si .

. Alors  (car )

* Si 



Alors  ( est libre, donc une base de )

Démonstration :

Soient , supposons que .

Alors . D’où, en prenant trois valeurs pour *x*, par exemple -1, 0, 1, on trouve .

Propriétés :

Soit *E* de dimension finie *n*.

Soit F une famille d’éléments de *E* de cardinal *p*, disons 

Notons . Soit  (ainsi, )

Alors :

\*  :  est génératrice de *F* donc 

\*  : *F* est un sous-espace vectoriel de *E* donc 

\*  F est libre :  est une base de *F*.

\*  F est génératrice de *E*:  F engendre *E*.

\*  F est une base de *E* (résulte des deux derniers points)

Exemple : famille de 5 vecteurs de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 4 :



* 1. Somme de sous-espaces vectoriels et dimension

Ici, *E* est un K-ev de dimension finie *n*.

Théorème :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E* en somme directe.

Si  est une base de *F*.

Et si  est une base de *G*.

Alors  est une base de .

En effet :

\*  est génératrice de  : évident.

\* Cette famille est libre : si , alors  car *F* et *G* sont en somme directe.

Or, si , alors  car  est libre.

Et si , alors  car  est libre.

Donc  est libre. C’est donc une base de .

Conséquence : si *F* et *G* sont en somme directe, alors 

Théorème :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*.

Alors 

Démonstration :

Posons . Alors *H* est un sous-espace vectoriel de *E*, *F* et *G*.

*H* est un sous-espace vectoriel de *G*, il a donc un supplémentaire dans *G*, disons .

Donc .

Alors , et *F* et  sont en somme directe :

1. La somme est directe : si , alors , et . Donc . Donc 
2.  : Déjà,  (si , alors )

Soit . Alors . Or, . Donc .

Donc 

Donc 

Ainsi, 

Or,  (car )

Donc 

Conséquence :

Soient *F*, *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*. Alors :



En effet :



* 1. Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe :

*E* est un K-ev de dimension finie .

*F* est un K-ev de dimension finie .

* + 1. Détermination d’une application linéaire par la donnée des images des vecteurs d’une base

Théorème :

Soit  une base de *E*.

Soit  un *p*-uplet de vecteurs quelconques de *F*.

Alors il existe une unique application linéaire  de *E* dans *F* telle que 

Démonstration :

* Unicité : si  convient, alors, étant donné , . Donc .
* Existence : Soit  l’application de *E* dans *F* définie par :



(La définition a un sens car la décomposition dans une base est unique)

Alors  est linéaire :

Soient , de composantes ,  dans  et .

Alors  a pour composantes  dans .

Donc 

Enfin, on a bien  :

Pour tout ,  a pour composantes  dans , donc 

Conséquence :

Si  est une base de *E*, et  est une base de *F*.

Alors la donnée d’une application linéaire de *E* dans *F* revient à la donnée de  scalaires, à savoir les , pour  tels que :



On range ces scalaires dans un tableau à *n* lignes, *p* colonnes, de sorte que, pour tout ,  est placé sur la *i*-ème ligne de la *j*-ème colonne :



Ce tableau s’appelle la matrice de  dans les bases  et  (attention : le « et » n’est pas commutatif)

La *j*-ème colonne de cette matrice est la colonne des composantes de  dans la base .

* + 1. Applications linéaires et images des vecteurs d’une base

Proposition :

Soit ,  une base de *E*. Alors :

(1) 

(2)  est surjective si et seulement si  est génératrice de *F*.

(3)  est injective si et seulement si  est libre.

(4)  est bijective si et seulement si  est une base de *F*.

Démonstration :

1. \* Si , alors .

\* Si , alors , où . Or,  (décomposition de *u* dans ). Donc 

1. Conséquence évidente de (1)
2. \* Si  est libre : soit , . Alors .  est libre, donc . Donc . Donc  est injective.

\* Si  est injective : soient . Supposons que . Alors . Donc  (car ). Donc  (car  est libre). Donc  est libre.

1. Conséquence directe de (2) et (3)

Conséquence :

Si , , alors :

 surjective 

 injective 

* + 1. Isomorphismes

Proposition :

Soit *E* de dimension *p*, *F* de dimension *n*.

Alors *E* et *F* sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration :

* Si *E* et *F* sont isomorphes, alors il existe  bijective. On a alors  (car alors  et )
* Si . Soient alors  une base de *E* et  une base de *F*. Il existe alors une application linéaire  telle que . Cette application est donc un isomorphisme (car la famille  est libre et génératrice)

Proposition :

Soient *E* et *F* de même dimension finie.

Alors, pour tout , on la les équivalences :



Démonstration :

Supposons que . Soit alors  une base de *E*.

Alors :



On fait la même chose pour l’autre équivalence.

Proposition :

Les isomorphismes conservent le rang, c'est-à-dire que si  est un isomorphisme de *E* dans *E*’, alors, pour toute famille  de vecteurs de *E*, .

En effet :

Si on note , alors , et  réalise alors un isomorphisme de *F* dans . Donc .

Exemple :

Soit *E* de dimension *n*,  une base de *E*.

Alors  est un isomorphisme.

* + 1. Le théorème « noyau - image »

Théorème :

Soient *E*, *F* deux K-ev, où *E* est de dimension finie.

Soit .

Alors  est de dimension finie, et .

Démonstration :

On peut introduire un supplémentaire *G* de  dans *E*. Ainsi, .

On définit alors . Alors  est linéaire (C’est en quelque sorte "")

Alors :

 est injective : 

 est surjective : Soit . *v* s’écrit , où . Alors . Donc .

Donc  est un isomorphisme. Donc .

Or, . Donc .

Conséquence :

On retrouve le fait que :



* + 1. Rang d’une application linéaire

Soit , où *E* est de dimension finie.

Alors 

Propositions :

- Si  est une base de *E*, alors :



- Si on note , , , alors :



(découle directement du théorème noyau – image)

* 1. Formes linéaires et hyperplan

Dans ce paragraphe, *E* désigne un K-ev de dimension .

* + 1. Formes linéaires de *E*.

Rappel : une forme linéaire de *E* est une application linéaire de *E* dans K. L’ensemble des formes linéaires de *E* est , noté aussi  (dual de *E*).

( est un K-ev).

Proposition :

Soit  une base de *E*.

Les formes linéaires de *E* sont exactement les applications du type :

, où .

En effet :

L’application :  est l’unique application linéaire de *E* dans K telle que . La matrice de cette application linéaire  dans les bases B et (1) est la matrice ligne  (1 ligne, *n* colonnes)

Cas particulier :

Pour , on note  la forme linéaire : 

(matrice ) ; on les appelle les projections relatives à B.

La famille des  est évidemment génératrice de  (lire « *E* dual »), et elle est libre : .

Donc  est une base de . Donc  est de même dimension que *E*. La base  est appelée la base duale de .

* + 1. Hyperplan

Définition :

Un hyperplan de *E* est un sous-espace vectoriel de *E* de dimension .

Exemple :

En dimension 2, les hyperplans sont des droites.

En dimension 3, les hyperplans sont des plans.

Théorème :

Les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles de *E*.

Plus précisément :

(1) Si , alors  est un hyperplan de *E*.

(2) Si *H* est un hyperplan de *E*, alors il existe  tel que .

(3) Si  tels que , alors  et  sont colinéaires,

c'est-à-dire qu’il existe  tel que .

Démonstration :

1. Si , alors  est un sous-espace vectoriel de K, qui est de dimension 1. Donc  est de dimension 0 ou 1. Si , alors  et . Donc  (et ).

Donc 

1. Soit *H* un hyperplan de *E*. Soit  une base de *H*.

On la complète en une base de *E*: .

Soit  la forme linéaire qui envoie les  sur 0 et  sur 1.

Alors  (car pour )

1. Si ,  ; donc , donc .

Si , le noyau de  est un hyperplan *H* de base , que l’on complète en une base  de *E*.

Alors :



Donc  (puisque  et la donnée des images des vecteurs d’une base détermine l’application linéaire)

Conséquence :

Soit  une base de *E*. Alors les hyperplans de *E* sont exactement les parties de *E* qui admettent dans la base B, une équation du type  ou les  sont des scalaires non tous nuls. De plus, si un hyperplan admet deux équations, alors elles sont proportionnelles.

Rappel : Etant donnée , la partie *E* d’équation  dans la base B est, par définition, l’ensemble des composantes  dans B vérifiant .

On verra que si *F* est un sev de *E* de dimension *p*, alors *F* est l’intersection d’hyperplans (et peut donc être défini par un système d’équations), le nombre minimum d’équations nécessaires étant .