Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre,  ou C (ou un sous corps de C). (Muni des lois + et  naturelles)

* 1. Définitions
     1. Définition

Soit *E* un ensemble, muni d’une loi de composition interne  et d’une loi externe à opérateurs dans K, notée , c'est-à-dire :

 et .

On dit que  est un espace vectoriel sur K/un K-espace vectoriel (K-ev) lorsque :

 est un groupe commutatif

* Pour tous , , on a :



Exemples :

, ,  sont des R-ev.

 est un K-ev.

* + 1. Règles de calcul

Soit  un K-ev. Alors :

1.  (neutre pour  du groupe  appelé le vecteur nul de *E*)

Démonstration :

.

Donc 

1. 

Démonstration :



Donc .

1. 

Démonstration :

Le sens  a été vu avec (1) et (2).

Pour  : Supposons que  et que .

Montrons qu’alors .

On introduit  (ce qui est possible car ).

Alors  d’une part,

Et  d’autre part.

Donc 

1. 

Démonstration :

. Donc 

. Donc .

1. 

(A gauche de l’égalité : itération dans  ; à droite : produit externe)

Démonstration :

Par récurrence pour les , puis la proposition (4) pour .

Ces règles permettent des écritures simplifiées :

+ pour ,  pour  voire omis,  pour la valeur commune de  et .

Vocabulaire :

Dans un K-ev , les éléments de *E* sont appelés des vecteurs, et les éléments de K des scalaires.

* + 1. Exemple important

Soit 

On munit   de la loi  et de la loi externe  à opérateurs dans K définis ainsi :

Pour tous  :



.

Alors  est un K-ev.

Démonstration :

Déjà,  est un groupe commutatif :

Le neutre pour  est évidemment , qui est bien dans .

Associativité :

Soient . Alors ,  et  où 

Alors :



Commutativité :

Soient , , . Alors :



Existence d’un inverse pour  de tout élément de .

Soit , .

Alors  est dans  et est évidemment inverse de *x* pour .

Soient maintenant , avec , .

On a :









Généralisation :

Si *E* et *F* sont deux K-ev, on peut munir naturellement  d’une structure de K-ev en posant, pour tous  :



Et plus généralement  où les  sont des K-ev.

* + 1. Vecteurs, combinaisons linéaires

Ici,  désigne un K-ev.

Définition :

Soit  une famille finie d’éléments de *E*.

Une combinaison linéaire de la famille / des  est un élément de *E* du type , c'est-à-dire  où les  sont des éléments de K.

Définition :

Soit .

Si , tout élément de *E* est dit colinéaire à *u*.

Si , les vecteurs de *E* colinéaires à *u* sont les .

Proposition :

La relation « être colinéaire à » est une relation d’équivalence.

En effet :

* Déjà, elle est réflexive…
* Symétrique : Supposons *v* colinéaire à *u*:

Si , *u* est bien colinéaire à *v* car 

Si , alors *v* s’écrit  où .

Donc soit  et alors  et donc *u* est colinéaire à *v*,

Soit , et alors  donc *u* est colinéaire à *v*.

* Transitivité : immédiate.

Définition équivalente :

Soient . On a l’équivalence :

*u* et *v* sont colinéaires 

Démonstration :

(1) est simplement une autre façon d’écrire la définition.

Montrons que . Supposons (1).

Si , on peut prendre 

Si , alors il existe  tel que .

Ainsi, avec , on a bien 

Montrons maintenant que . Supposons (2).

Soit  tel que .

Si , alors 

Si , alors . Or,  car . Donc .

* 1. Sous-espace vectoriel

 désigne toujours un K-ev.

* + 1. Définition

Soit *F* une partie de *E*.

On dit que *F* est un sous-espace vectoriel (sev) de *E* lorsque :

* *F* contient .
* *F* est stable par + : 
* *F* est stable par  : .

Proposition :

Si *F* est un sous-espace vectoriel de *E*, alors + constitue une loi de composition interne sur *F*,  constitue une loi externe à opérateurs dans K, et  est un K-ev :

* Déjà,  est bien un groupe commutatif puisque *F* est un sous-groupe de  car , *F* est stable par + et .
* De plus, on vérifie immédiatement que les quatre règles sont bien vérifiées…

Exemples :

*  est un R-ev. Quels en sont les sous-espaces vectoriels ?

- 

- Pour ,  est un sous-espace vectoriel de .

- .

Il n’y en a pas d’autres : si un sous-espace vectoriel de  contient deux vecteurs non colinéaires, c’est .

* Si *E* est un K-ev quelconque :

 et *E* sont deux sous-espaces vectoriels de *E*.

Si ,  est un sous-espace vectoriel de *E* appelé la droite vectorielle de *E* engendrée par *u*.

* Les sous-espaces vectoriels de  sont exactement :

- 

- Pour , .

- Pour  avec *u* et *v* non colinéaires,  (plan vectoriel)

- 

* Des sous-espaces vectoriels de  :

 où *a* est un élément de R fixé.

 l’ensemble des fonctions du type , .

Ou même ,  (où )



L’ensemble des fonctions paires, impaires…

* + 1. Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème :

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de *E* en est un sous-espace vectoriel.

Démonstration :

Soit  une famille de sous-espaces vectoriels de *E*.

Soit 

Alors  car 

*F* est stable par + :

Soient . Alors , donc . Donc 

*F* est stable par  :

Soient . Alors , donc , donc .

* + 1. Définitions équivalentes

Soit . Alors :



Pour (3t) : 

Démonstration :

 : évident.

 : immédiat.

 : immédiat par récurrence.

 : cas particulier.

 :

Si on a , on applique  avec  et on obtient (2), puis (3b) avec  et on obtient (1).

D’où toutes les équivalences.

De plus, on peut partout remplacer (0) par (0b) : «  ».

* + 1. Sous-espace vectoriel engendré par

Définition :

Soit . Le sous-espace vectoriel engendré par *A*, noté , est le plus petit des sous-espaces vectoriels de *E* contenant *A*.

Justification :

L’ensemble  des sous-espaces vectoriels de *E* contenant *A* n’est pas vide, puisqu’il contient *E*, et l’intersection  est un sous-espace vectoriel de *E* contenant *A*, et est contenu dans chaque *X* de , c’est donc bien le plus petit éléments de .

Proposition :



* Si , , noté aussi .
* *A* est un sous-espace vectoriel de *E* si et seulement si .
* Si *F* est un sous-espace vectoriel de *E*, et si , alors 

(En effet,  et )

* Si , alors  :

.

Donc . Donc  (d’après le point précédent).

Cas particulier :

Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie :

Soient  des vecteurs de *E*.

Alors , plutôt noté , est appelé le sous-espace vectoriel de *E* engendré par la famille  ou « par les  »

Proposition :

 est l’ensemble des combinaisons linéaires des , c'est-à-dire :



Démonstration :

Notons .

Alors  contient  et est stable par + et 

(car  et )

Donc  est un sous-espace vectoriel de *E* contenant les , et c’est le plus petit car si un sous-espace vectoriel de *E* contient les , il en contient alors toutes les combinaisons linéaires. Donc .

Vocabulaire :

* Si *F* est le sous-espace vectoriel engendré par une famille (finie)  de vecteurs de *E*, on dit que F est une famille génératrice de *F*.
* Si un espace vectoriel *E* admet une famille génératrice finie, on dit que *E* est de type fini.

Exemple :

 est de type fini, une famille génératrice étant 

 n’est pas de type fini. En effet, supposons qu’il admette une famille génératrice finie  ; si on prend , on aurait alors  ce qui est faux.

Propriétés :

Pour tout , on a :

* Pour tous  avec  :



* Pour tout  et tout  :



* Pour tout  distincts et tout  :



Démonstration (3ème point) :

Soit 



Avec 

L’autre inclusion est analogue.

On a donc un algorithme pour déterminer le Vect (sur un exemple) :



Ainsi, on a l’équivalence :

Pour tout ,



Autre résultat :

Si , alors .

Pour tout , 

* 1. Sommes et sommes directes

 désigne ici encore un K-ev.

Définition et proposition :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*.

La somme de *F* et *G* est :



Alors  est un sous-espace vectoriel de *E*, et c’est même .

En effet :

Déjà,  est un sous-espace vectoriel de *E*, car il contient  et est stable par  (évident en utilisant la deuxième égalité de la définition de )

De plus,  contient *F* (car tout *u* de *F* s’écrit  où ) et *G*.

Il contient donc .

Enfin, si un sous-espace vectoriel de *E* contient , alors il contient au moins  car il contient tous les éléments de *F*, tous les éléments de *G* et est stable par +, donc contient tous les  pour  et .

Exemple :

- Dans  :

Soit *F* l’ensemble des fonctions polynomiales de degré , *G* l’ensemble des fonctions de classe  et négligeables devant  au voisinage de 0.

Alors . En effet :

Une première implication est déjà évidente. Pour l’autre :

Soit . Alors *f* admet un DL à l’ordre 2 en 0 :



Alors *h* est de classe  car , et de plus  en 0.

D’où l’autre inclusion et l’égalité.

- Dans  : 

Alors 

Et donc .

Somme directe, définition :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*.

On dit que la somme  est directe lorsque tout élément de  s’écrit de manière unique sous la forme  avec  et .

Autrement dit, étant donné qu’on connaît déjà l’existence (par définition) de l’écriture, la définition devient :

La somme de *F* et *G* est directe 

Exemple :

La somme de deux droites vectorielles distinctes dans .

Proposition :

On a l’équivalence entre les propositions suivantes :

1. La somme de *F* et *G* est directe (expression de la définition précédente)
2. 
3. 

((1) : )

Démonstration :

* On voit déjà que  (c’est un cas particulier avec )
* Montrons que . Supposons (2) :

Soit alors 

On a : . Or,  et  (car  et *G* est stable par )

Donc, d’après (2),  (et ), d’où une inclusion et l’égalité.

* Montrons que . Supposons (3).

Soient . Supposons que .

Alors , et , donc .

Donc  et , c'est-à-dire  et .

D’où les équivalences.

Notation :

Si la somme de *F* et *G* est directe, on peut la noter .

Définition :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*.

On dit que *F* et *G* sont supplémentaires dans *E* lorsque :



Ainsi, lorsque *F* et *G* sont supplémentaires dans *E*, on peut noter .

Deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* sont supplémentaires dans *E* si et seulement si tout élément de *E* s’écrit de manière unique , où  et .

* 1. Applications linéaires

Dans ce paragraphe, *E*, *F* et *G* sont trois K-ev.

* + 1. Définition

Soit .

On dit que  est linéaire/un morphisme du K-ev *E* vers le K-ev *F* lorsque :



Proposition :

Si  est une application linéaire de *E* dans *F*, alors  est un morphisme du groupe  vers .

Vocabulaire :

* L’ensemble des applications linéaires de *E* vers *F* est noté 
* Une application linéaire de *E* vers *E* s’appelle aussi un endomorphisme de *E*, et  est plutôt noté .
* Une application linéaire de *E* vers K s’appelle forme linéaire de *E*.  est noté . L’ensemble des formes linéaires de *E* s’appelle le dual de *E*.

Caractérisations équivalentes :

Soit .



En effet :

 : évident.

Montrons que .

On applique (3) avec . Donc 

Donc avec , .

Donc 

Exemple :

* L’application nulle de *E* dans *F* est linéaire.
* L’application identité de *E* dans *E* est linéaire.
* Les applications linéaires de R dans R sont exactement les applications de la forme  où  :
  + Déjà, si *f* est de la forme , alors *f* est linéaire, car :



* + Inversement, soit .

Alors, pour tout , 

Ainsi, avec , on a bien .

* L’application  est linéaire.
* L’application  est une forme linéaire de 

( est l’ensemble des suites convergentes)

* L’application  est linéaire :

Pour tous , 

Pour tout  et , .

* L’application  n’est pas linéaire.

Mais, à *x* fixé,  est linéaire (idem si *y* est fixé)

On dit alors que  est bilinéaire.

* + 1. Noyau et image

Soit .

Le noyau de , c’est le noyau du morphisme de groupe :

.

Alors .

Donc  est injective .

En effet :

- Si  est injective :

Soit . Alors . Donc .

D’où une première inclusion, et l’égalité, l’autre inclusion étant évidente.

- Supposons maintenant que .

Si , alors , donc . Donc .

Donc  est injective.

Proposition :

 est un sous-espace vectoriel de *E*.

Démonstration :

Déjà, , et .

Soient . On a :



L’image de  est .

Alors  est surjective si et seulement si .

Proposition :

 est un sous-espace vectoriel de *F*.

Démonstration :

Déjà,  et  car .

 est stable par + et  :

Soient .

Il existe alors  tels que .

Alors . Donc .

* + 1. Image directe, image réciproque d’un sous-espace vectoriel

Proposition :

Soit .

L’image directe par  d’un sous-espace vectoriel de *E* est un sous-espace vectoriel de *F*.

L’image réciproque par  d’un sous-espace vectoriel de *F* est un sous-espace vectoriel de *E*.

Cas particulier :

 est un sous-espace vectoriel de *F* (c’est )

 est un sous-espace vectoriel de *E* (c’est )

(On adapte aisément la démonstration de ces cas particuliers pour le cas général de la proposition)

* + 1. Structure sur des ensembles d’applications linéaires
       1. Somme, produit par un réel

Soient , .

On définit :

 et 

Alors .

On peut donc considérer , et  est un K-ev (et même un sous-espace vectoriel de ).

Démonstration :

Déjà, on vérifie que  est un K-ev…

 est une partie de , contient  et est stable par + et  :

Soient , .

On a, pour tous  et tout  :





Donc , et  est un sous-espace vectoriel de , donc un K-ev.

* + - 1. Composition

Proposition :

La composée, quand elle est définie, de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration :

Soient  et . Alors  est bien définie et va de *E* dans *G*. Et de plus, elle est linéaire :

Pour tous  et tout , on a :



Propriétés :

Pour tous ,  et tout , on a :





Démonstration :

Déjà, les applications sont bien définies et vont de *E* dans *G*.

De plus, pour tout  :



D’où (1).



D’où (2) (ici, on n’a pas utilisé la linéarité…)



D’où (3)



D’où (4) (on n’a pas non plus utilisé la linéarité)

Conséquence :

 définit une loi de composition interne sur , et  est un anneau :

 est un groupe commutatif (car  est un K-ev).

De plus, il résulte de (1) et (2) que  est distributive sur +, et on sait que  est associative (vrai dans ).

Enfin, il y a un neutre, à savoir .

Attention, l’anneau n’est ni commutatif ni intègre en général.

Exemple :

, .

Alors  :

Soient , . Alors :



Et  :

Soient , . Alors :



On a alors :

 et 

Ce qui montre la non commutativité et la non intégrité.

* + - 1. Inversion (éventuelle)

Proposition :

Soit . Si  est bijective, alors . On dit alors que  est un isomorphisme de *E* vers *F*.

Deux espaces vectoriels sont dis isomorphes lorsqu’il existe un isomorphisme de l’un vers l’autre.

Démonstration :

Soient  et .

On doit montrer que , c'est-à-dire que  a pour antécédent  par , ce qui est vrai car 

Vocabulaire :

Automorphisme de *E* = application linéaire bijective de *E* dans *E*.

= isomorphisme de *E* dans *E*.

= endomorphisme bijectif de *E*.

L’ensemble des automorphismes de *E* est noté .

Alors  est stable , et  est un groupe (le groupe linéaire de *E*). C’est le groupe des éléments inversibles de l’anneau .

Attention, ce groupe n’est pas non plus commutatif en général.

Exemple :

Soient  et 

Alors *f* et *g* sont linéaires et bijectives.

(*g* est bijective car involutive, et , donc )

Et :



* + - 1. Autre opération

Soit *f* une application linéaire de *E* dans K (une forme linéaire de *E*).

Soit .

Alors l’application  est linéaire.

En effet :

Soient . Alors :



Exemple :

L’application  est linéaire :

Pour tous  et , on a :



 est la « première projection canonique de  sur R »

De même,  et  sont linéaires.

- Il résulte du 1) que pour tous ,  est linéaire, car .

- Et du 4) que pour tout ,  est linéaire, car  : 

De même, 

D’où  est linéaire.

On verra que toutes les applications de  dans  sont de ce type.

(On peut généraliser le résultat à )

* 1. Quelques endomorphismes intéressants

*E* désigne toujours un K-ev.

* + 1. Homothétie (vectorielle)

Définition :

Une homothétie de *E* est une application du type : , où .

Proposition :

Pour tout , l’application , appelée homothétie de rapport  est linéaire. Elle est nulle si , sinon elle est bijective, d’inverse 

* + 1. Projecteurs (vectoriels)

Définition :

Soient *F*, *G* deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de *E*. Le projecteur sur *F* selon *G* est l’application , où *v* est l’élément de *E* tel que  avec . (la définition a bien un sens, car tout élément de *E* s’écrit  de manière unique avec  et )

On écrit parfois .

Proposition :

L’application *p* est linéaire, de noyau *G* et d’image *F*.

Démonstration :

Soient . Alors .

Donc , soit .

Noyau :

Soit , . On a les équivalences :



Image :

On voit déjà que . Inversement,  car tout élément *v* de *F* est l’image d’un élément de *E*, par exemple lui-même.

Définition :

Soit . On dit que *f* est un projecteur lorsqu’il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans *E* tels que *f* est le projecteur sur *F* selon *G*.

Vocabulaire :

*p* est le projecteur sur *F* selon *G*.

Pour ,  est la projection de *u* sur *F* selon *G*.

Théorème :

Soit .

Alors *f* est un projecteur .

Démonstration :

Soit *f* un projecteur, disons sur *F* selon *G* où 

Alors  :

Soit . , et .

De plus, .

C’est valable pour tout *u*, donc .

Soit , supposons que .

Posons  et .

Alors déjà *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels de *E*. Montrons qu’ils sont supplémentaires.

Soit . Alors , et on a :



, donc 

Donc déjà .

Montrons maintenant que  :

Soit .

. Donc  où .

Comme , , soit . Comme , .

Donc , d’où une première inclusion, et l’égalité, l’autre inclusion étant évidente.

Donc 

Montrons maintenant que *f* es le projecteur sur *F* selon *G*.

Soit .

Alors . Donc  est la composante selon *F* dans la décomposition de *u* sous la forme 

Remarque :

Si *p* est le projecteur sur *F* selon *G*, alors :



En effet, 

Définition :

Soit *p* la projection sur *F* selon *G*.

Le projecteur associé à *p* est le projecteur *q* sur *G* selon *F*.

Ainsi, .







Cas particuliers :

Le projecteur sur *E* selon  est l’identité sur *E*.

Le projecteur sur  selon *E* est l’application nulle.

* + 1. Symétries (vectorielles)

Définition :

Soient *F* et *G* deux sous-espaces vectoriels de *E* supplémentaires. La symétrie par rapport à *F* selon *G* est l’application .



Proposition :

Si *f* est le symétrique par rapport à *F* selon *G*, alors :

.

En effet, on remarque que , où *p* est le projecteur sur *F* selon *G* et *q* le projecteur associé à *p*)

* *f* est bijective, et même involutive.

Ainsi, ,  (car *f* est surjective), et  (car *f* est injective)



Théorème :

Soit .

Alors *f* est une symétrie 

( *f* est involutive)

( *f* est élément d’ordre  du groupe )

Démonstration :

 a déjà été vu.

 : supposons que .

Posons  et .

Alors *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels de *E*, car ce sont des noyaux d’endomorphismes de *E*.

 car si , alors  et ,

donc , soit  (car )

De plus tout élément *u* de *E* s’écrit , car .

Or,  car 

Et  car 

Enfin, *f* est la symétrie par rapport à *F* selon *G*. En effet :

Si , on a  et .

Donc .

* 1. Familles libres (finies)

*E* désigne toujours un K-ev.

* + 1. Définition

Soit  une famille de vecteurs de *E*.

F est libre  la seule combinaison linéaire des  qui donne  est celle dont tous les coefficients sont nuls.



Vocabulaire :

 est liée  n’est pas libre.

* Lorsque  est liée, une relation du type  où les  sont non tous nuls s’appelle une relation de dépendance linéaire.
* Pour dire que  est libre, on dit parfois que les  sont linéairement indépendants.

Exemples :

* Par convention, une famille vide est libre.
* Cas d’une famille de 1 vecteur .

La famille  est libre 

* Cas d’une famille de 2 vecteurs 

 est libre si et seulement si  et  ne sont pas colinéaires.

* + 1. Propriétés générales
* Si une famille contient , elle est liée :

Si , alors 

* Si une famille contient deux vecteurs égaux, elle est liée :

Si  (avec ), alors 

* Si une sous-famille d’une famille F est liée, alors F est liée.
* Si  est libre, alors  est libre.
* Si  est libre et  est liée, alors .

En effet :

Il existe  scalaires non tous nuls tels que :

.

Alors , car sinon l’un des  au moins serait non nul et on aurait alors une relation de dépendance entre les . Donc 

*  est liée si et seulement si l’un au moins des  est combinaison linéaire des autres.
  1. Bases (finies)

Définition, proposition :

Soit  une famille de vecteurs de *E*.

 est une base de *E*  est une famille libre et génératrice de *E*.

 tout vecteur *v* de *E* s’écrit de manière unique comme combinaison linéaire des , sous la forme . Les  s’appellent alors les composantes de *v* dans la base .

Démonstration :

 : supposons que  est une base de *E*.

Soit alors .

Comme  est génératrice de *E*, il existe  tel que .

Supposons qu’on ait aussi .

Alors . Comme  est libre, on a , soit .

D’où l’existence et l’unicité de l’écriture.

 : Supposons que tout vecteur *v* de *E* s’écrit de manière unique…

Déjà,  est génératrice de *E*.

Ensuite, si , alors nécessairement , car sinon on aurait deux écritures différentes de , à savoir  et .

Exemples :

 est une base de , on l’appelle la base canonique de .

 en est aussi une. Le triplet des composantes d’un vecteur  de  dans cette base est .

 est aussi une base de  :

Soit .

On doit montrer qu’il existe un unique triplet de  tel que 

L’équation vectorielle équivaut au système :



Or, 

Donc (*S*) a bien une unique solution.