Intégrales curvilignes, formes différentielles

Ici, .

* 1. Intégrale curviligne le long d’une courbe

Soit  un arc paramétré de classe , de support *C*.

Soit  une fonction continue.

On appelle intégrale curviligne de *f* le long de , et on note  le réel défini par  (où )

Admis :

Si le paramétrage est « raisonnable » (en particulier pas de points doubles autres qu’en des points isolé), cette intégrale ne dépend que de *C*.

Généralisation :

Aux arcs continus et de classe  par morceaux,

c'est-à-dire que  est continu et il existe une subdivision  de  telle que  est de classe .

(On généralise par addition…)

Interprétation :

*s* étant une abscisse curviligne,  représente « le déplacement élémentaire sur *C* ».

Ainsi,  (admis)

où, pour tout ,  (subdivision régulière de ).

Utilité :

Exemple : un fil dont la forme est donné par la courbe paramétrée , de densité linéique  (fonction continue de *M*) a pour masse totale .

* 1. Formes différentielles sur un ouvert de .

Soit  un ouvert de .

* + 1. Définition

Une forme différentielle sur  est une application de  dans .

Si par exemple , on sait que  (dual de ) est un R-ev de dimension 3, dont une base naturelle est constituée des 3 projecteurs : ,  et , qu’on a notés en analyse .

Ainsi, une forme différentielle  sur  s’écrit :

 où *A*, *B*, *C* sont 3 applications de  dans R.

Autrement dit :

.

On dit que  est de classe  lorsque *A*, *B*, *C* le sont.

De même si , une forme différentielle sur un ouvert  de  s’écrit :

 où *A* et *B* sont des fonctions de  dans R.

Exemples :

-  définie par  est une forme différentielle de classe  sur .

- Si  est de classe , alors  est une forme différentielle continue sur .

* + 1. Formes différentielles exactes

Définition :

Soit  une forme différentielle continue sur . On dit que  est exacte lorsqu’il existe *f*, de classe  sur , telle que .

Autrement dit, avec  par exemple :

La forme différentielle  définie par  (où *A* et *B* sont continues) est exacte si et seulement si il existe *f*, de classe , telle que ,  et .

* + 1. Intégrale curviligne d’une forme différentielle le long d’une courbe

Soit  un arc de classe  et de support *C*.

On prend les notations habituelles :

On pose .

Attention : ,  et .

Autrement dit, dans le cas  :

Si , alors :



Admis :

Si le paramétrage est « raisonnable », cette intégrale ne dépend que de *C* et de l’orientation de *C* définie par ce paramétrage (l’intégrale est changée en son opposée si la paramétrisation inverse l’orientation de *C*).

Lien avec les intégrales curvilignes de fonctions :



On peut ici encore généraliser aux arcs continus et  par morceaux, par addition.

Cas où  est exacte :

Théorème :

Soit , de classe , et soit  continue et de classe  par morceaux, de support contenu dans .

Alors , où *A* est le point de  de paramètre *a*, *B* celui de paramètre *b*.

En particulier, si  est fermé (c'est-à-dire ), .

Démonstration :

Avec les notations précédentes, dans le cas  par exemple :



* 1. Circulation d’un champ de vecteurs

Soit  un ouvert de , et soit  un champ de vecteurs de classe .

On a : 

Soit  la forme différentielle .

Alors  est aussi noté , appelé circulation de  le long de .

Justification, interprétation :



Où  et .

(La dernière égalité est admise, mais intuitivement claire)

Ainsi, le théorème du paragraphe précédent s’écrit aussi :

 (circulation d’un champ dérivant d’un potentiel)

où  est de classe .