# Méthodes de calcul des intégrales doubles

Convention : on identifie le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal direct à . Les coordonnées seront *x*, *y*.

* 1. Intégrales doubles et aires
     1. Domaines élémentaires, domaines simples

Une partie de  est un domaine élémentaire de  si elle admet *les* *deux* définitions suivantes (*simultanément*) :



où  (resp. ) sont des fonctions continues sur  (resp. ) telles que  sur  (resp.  sur )

Un domaine est dit simple s’il est réunion finie de domaines élémentaires d’intérieurs deux à deux disjoints.

Remarque :

Un convexe compact d’intérieur non vide est élémentaire.

Les domaines simples sont un cas particulier de domaines quarrables de  (resp. de ), c'est-à-dire de compacts dont la frontière est une réunion finie d’arcs paramétrés (resp. de nappes paramétrées) ‘de mesure nulle’. C’est pas exemple le cas lorsque la frontière est réunion finie d’arcs (resp. de nappes) de classe  ou de graphe de fonctions continues comme ci-dessus.

* + 1. Intégrale d’une fonction continue sur un domaine simple

Théorème :

Soit  continue sur le domaine élémentaire *A* où



où  (resp. ) sont des fonctions continues sur  (resp. ) telles que  sur  (resp.  sur ). Alors les deux intégrales suivantes existent et sont égales :



Définition :

Sous les hypothèses du théorème, on pose :



Plus généralement, si *f* est continue sur le domaine simple *D* réunion des domaines élémentaires  d’intérieurs deux à deux disjoints, on pose :



Remarque :

On admet que deux découpages distincts en domaines élémentaires d’un même domaine simple fournissent la même valeur de l’intégrale.

Théorème :

1. Linéarité : l’intégrale sur un domaine simple fixé *D* est linéaire par rapport à la fonction.
2. Additivité : soient ,  deux domaines simples de  d’intérieurs disjoints et  continue.

Alors 

* + 1. Aire (ou mesure) d’un domaine simple *D* de .

C’est le réel positif .

* + 1. Lien avec les intégrales sur .

Soit *A* un domaine simple et  continue. On prolonge *f* sur  en  par 0 sur .

Lemme :

Pour tout , il existe deux fonctions continues  à support compact telles que  et 

Théorème et définition :

Les deux quantités ci-dessus existent et sont égales, et on définit l’intégrale de  sur  par :



Théorème :

Avec les notations précédentes, on a 

* 1. Changement de variables
  + Théorème :

Soit  une application  qui soit un homéomorphisme du domaine *D’* sur le domaine *D* et un difféomorphisme entre l’intérieur de *D’* et celui de *D*.

On note  le jacobien de  au point  (il ne s’annule pas à l’intérieur de *D’* mais peut s’annuler sur la frontière)

Dans ces conditions, pour  continue, on a :



(Attention : il faut prendre la valeur absolue du jacobien)

* + Exemple fondamental des coordonnées polaires :

On prend  que l’on suppose vérifier les conditions du théorème (par exemple un difféomorphisme). Dans ces conditions, pour  continue, on a .

* 1. Utilisation d’une forme différentielle, formule de Green–Riemann
  + Théorème :

Soit  une forme différentielle de classe  sur un ouvert *U* de , et  un domaine (*D* *entier* doit être dans *U*), et  une représentation paramétrique continue partout et  par morceaux de la frontière de *D* orientée dans le sens direct. Dans ces conditions, on a :



* + Applications aux aires planes :

Si *D* est le domaine de frontière orientée  (qui est un chemin fermé), les formes différentielles ,  et leur demi–somme fournissent les formules d’aires :



Si la frontière est la courbe simple d’équation polaire , avec *f* à valeurs strictement positives, l’aire vaut aussi 

* 1. En pratique

Pour calculer une intégrale donnée, il y a deux points incontournables :

Il faut commencer par représenter graphiquement le domaine d’intégration.

Ensuite, selon les symétries de la fonction et du domaine, il faut choisir la méthode de calcul. Dans tous les cas, il faut s’aider d’une étude graphique : celles des « tranches » si on les utilise, du nouveau domaine pour un changement de variable, du chemin orienté pour l’usage d’une forme différentielle…