Formes différentielles de degré 1, intégrales curvilignes

* 1. Formes différentielles de degré 1 de classe , .
* Soit *U* un ouvert de . On appelle forme différentielle de degré 1 de classe  toute application  de classe .
* Soit  la base canonique de ,  sa base duale.

Ainsi, toute application  s’écrit de manière unique :

 où  sont les fonctions coordonnées.

Proposition :

 est une forme différentielle de classe  si et seulement si pour tout ,  est de classe .

* 1. Formes différentielles exactes (de degré 1)
* Théorème :

Pour toute application  de classe  (), est une forme différentielle de degré 1 et de classe .

De plus, pour , on a .

Définition :

Une forme différentielle de classe   est dite exacte (ou totale) lorsqu’il existe  de classe  telle que , c'est-à-dire :

Si , alors  est exacte si et seulement si il existe *f* de classe  telle que . Dans ce cas, *f* est appelée primitive de .

* Proposition :

Si *U* est convexe et si *f*, *g* sont deux primitives de la même forme différentielle  sur *U*, alors  est constante.

Remarque :

C’est vrai pour *U* connexe par arcs.

Démonstration :

Si , alors 

* Cas particulier et nouvelle notation :

Soit . Alors *f* est de classe , et la différentielle de *f* est 

En utilisant , base duale de la base canonique, on a , fonction constante (de )

Notation :

On pose 

Ainsi, toute forme différentielle de classe  s’écrit de manière unique  où  est de classe .

En particulier, si  est de classe , on aura .

* 1. Formes différentielles de degré 1 fermées, théorème de Schwarz, théorème de Poincaré
* Théorème (Schwarz) :

Soit  une forme différentielle de classe , .

Si  est exacte, alors 

Démonstration :

Si , où  est de classe  (), alors 

Comme *f* est de classe , on a



* Définition :

Une forme différentielle  de classe  () telle que  est dite fermée.

Corollaire :

Toute forme différentielle exacte est fermée.

* Exemple :

Il existe des fonctions fermées non exactes :

On pose  sur 

Ainsi, 

 est de classe  et fermée sur , mais non exacte.

En effet, 

Et 

Donc  est fermée.

Mais  n’est pas exacte, car on verra que si elle l’était, l’intégrale curviligne de  sur le cercle unité serait nulle ce qui n’est pas le cas.

Remarque :

 est exacte sur  car en posant , on a 

* Théorème de Poincaré :

Rappel :

Une partie *A* de  est dite étoilée par rapport à  si 

Proposition :

Un convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Une partie étoilée est connexe par arcs ; la réciproque est fausse.

Remarque :

 n’est pas étoilé mais est connexe par arcs.

Théorème (Poincaré) :

Soit *U* un ouvert étoilé de ,  une forme différentielle de degré 1 et de classe  ()

Alors  est exacte sur *U* si et seulement si elle est fermée sur *U*.

Démonstration :

Le sens direct est déjà vu.

Pour l’autre :

On se place dans le cas  (pour simplifier les notations) :

Soit  de sorte que *U* soit étoilé par rapport à 

Soit  une forme différentielle fermée de classe .

Pour , on pose 

On va montrer que *f* est de classe  et que .

On suppose pour simplifier que .

On fixe *x* au voisinage de 0 et on considère l’application 

On pose  pour  et *y* au voisinage de 0.

Alors  est continue sur  où *I* est un intervalle de R contenant 0, admet une dérivée selon *y*  pour tout , qui est aussi continue.

Comme on intègre sur un segment, pour tout compact , on a domination par des constantes sur le compact , donc le théorème de dérivation des intégrales dépendant d’un paramètre s’applique et on a, d’après la formule de Leibnitz :



De même, 

* 1. Intégrales curvilignes
* Chemin  par morceaux et continu :

On appelle chemin  par morceaux toute application  continue et de classe  par morceaux. Il sera dit fermé si 

* Intégrales curvilignes :

Définition :

Soit  une forme différentielle continue ; on note  tels que .

Soit aussi  un chemin continu  par morceaux, on note  les applications coordonnées ()

On appelle intégrale de  sur  la quantité :



Où  sont tels que pour tout ,  est de classe .

NB : si  est de classe , .

Théorème (invariance par changement de paramètre croissant) :

Soit  un chemin continu  par morceaux,  une forme différentielle continue sur *U*, et  un –difféomorphisme croissant.

Ainsi,  est une représentation paramétrique admissible de la même courbe orientée que .

Alors 

Autrement dit,  ne dépend pas de  mais seulement de la courbe paramétrée par .

Définition :

Soit  une courbe orientée continue et  par morceaux incluse dans *U*.

On pose  où  est une représentation paramétrique admissible quelconque de .

Démonstration :

Pour  de classe  (pour  par morceaux, il suffit de couper le segment) :

On note  les applications coordonnées de ,  celles de .

Ainsi, . On a alors :



Où on a fait à l’avant-dernière égalité le changement de variables .

* Cas d’une forme exacte :

Théorème :

Soit  de classe ,  un chemin continu,  par morceaux inclus dans *U*, d’origine *A* et d’extrémité *B*.

Alors 

En particulier, l’intégrale curviligne d’une forme différentielle exacte sur un chemin fermé est nulle.

Démonstration :

Soit  un paramétrage admissible de .

Alors :



Exemple :

 n’est pas exacte sur 

En effet, en prenant pour  le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique paramétré par , on a :



* 1. Interprétation en termes de champs de vecteurs et de circulation
* Définition :

On munit  de son produit scalaire canonique.

Un champ de vecteurs sur *U* ouvert de  est une application .

A toute forme différentielle , on peut associer un champ de vecteurs et vice-versa. En effet, à , on peut associer  caractérisé par 

Théorème :

Si  est la forme différentielle définie par , alors le champ de vecteurs associé est 

* Intégrale curviligne, circulation :

Soit  un chemin continu et  par morceaux inclus dans *U*.

Si  est le champ associé à , on pose :

 où  est un paramétrage admissible de  et .

* Forme exacte et potentiel (pour ) :

Proposition :

1. La forme différentielle  est exacte si et seulement si  dérive d’un potentiel ; plus précisément,  signifie .
2.  est fermée si et seulement si le rotationnel de  est nul.

Corollaire (Poincaré) :

Soit  un champ de classe  sur  étoilé.

Alors  dérive d’un potentiel si et seulement si son rotationnel est nul.

Exercices :

Soit  où *U* est un ouvert étoilé de , et *f* de classe  harmonique.

Alors il existe  de classe  harmonique telle que 

Idée :

On pose  pour 

Alors  est une forme différentielle de classe , elle est fermée car *f* est harmonique. Comme *U* est étoilé,  est donc exacte d’après le théorème de Poincaré.

Ainsi, il existe *g* telle que (\*)

De plus, *g* est harmonique car 

Remarque :

On peut en déduire que  est harmonique si et seulement si il existe  holomorphe telle que .

Il suffit en effet de prendre .

Comme une fonction holomorphe est de classe , il en résulte qu’une fonction harmonique est aussi de classe .

Etude de 

Calculer  par deux méthodes, où  est la courbe fermée :



En déduire .

Par la définition, ,  et 

Donc



Deuxième méthode :

 est fermée. En effet,

 et 

Donc comme  est étoilé, 

Donc 

Si  : Pour , on a 

Donc 

Donc



De plus, 

Donc l’intégrale est semi convergente, et : 

Donc 

Si , 

Et 