Formules de Taylor

Dans tout ce chapitre, *I* est un intervalle de R, et les fonctions sont à valeurs dans R ; *n* désigne un entier naturel.

* 1. Préliminaire
* Soient .

Soit .

Alors , et, pour tout  :



Et  pour 

En 0 :



 pour 

* Plus généralement :

Soient , .

Soit 

Alors , et, pour tout  :

 pour .

On a les mêmes dérivées en *a* qu’en 0 dans le premier cas.

* Soit , soit . On suppose que *f* est *n* fois dérivable en *a*.

Soit  le polynôme de degré  dont les dérivées successives jusqu’à la *n*-ième en *a* coïncident avec celles de *f*, c'est-à-dire, d’après le préliminaire pour les dérivées successives de  en *a* :



Pour tout , on pose .

Ecrire une formule de Taylor pour *f* à l’ordre *n* en *a*, c’est écrire :

.

 s’appelle la partie polynomiale,  le reste.

Le but du chapitre est de donner des théorèmes à propos du reste.

* 1. Inégalité de Taylor–Lagrange

Théorème :

Soit *f* une fonction de classe  sur un segment . Alors :

, avec

.

(La borne sup. est bien définie car  est définie et continue sur le segment )

C’est l’inégalité de Taylor–Lagrange à l’ordre *n* de *f* entre *a* et *b*.

Démonstration :

\* Le cas où  est trivial.

\* Si  : on va montrer que pour tout , on a :

où , ce qui établira le résultat en prenant 

- Montrons la deuxième inégalité :

Soit 

C'est-à-dire 

Alors  est de classe  sur , et :



 car .

Donc  est décroissante, et . Donc , donc  est décroissante, et . Donc… donc  est décroissante, et , donc .

Donc 

Et, en particulier : 

- Pour la deuxième inégalité :

Soit  définie par 

Alors , et :



 car , soit .

Donc  est croissante, et . Donc , donc  est croissante, et . Donc… donc  est croissante, et , donc .

Donc 

Donc 

- Ainsi, , soit .

\* Si  :

Etant donné  de classe , en posant , on introduit .

Alors *g* est de classe , et , .

Le théorème, montré dans le cas précédent, pour *g* entre  et  donne :



avec .

On a :



Donc

, et :



Cas particulier : l’inégalité entre 0 et *x*:

Inégalité de Taylor–Lagrange entre 0 et *x* pour *f* de classe  :

Soit *I* un intervalle contenant 0.

Soit *f* de classe  sur *I*.

Alors, pour tout , on peut écrire :

, avec :



Exemple :

La fonction exponentielle étant de classe  sur R, on peut écrire cette inégalité à n’importe quel ordre :

, avec 

* 1. Formule de Taylor–Young

Théorème :

Soit . Soit *f* une fonction de classe  sur un intervalle *I* contenant *a*.

Alors il existe une fonction  qui tend vers 0 en *a* telle que :

Formule de Taylor–Young à l’ordre *n* en *a* pour *f* de classe .

Autrement dit, au voisinage de *a*:



Démonstration :

Soit .

Pour , posons :



On a alors déjà l’égalité. Reste à montrer que .

Pour cela, on applique l’inégalité de Taylor–Lagrange à l’ordre  à la fonction  entre *a* et *x*, où *x* est un élément quelconque de *I*.

On a alors :



Mais , d’après le préliminaire.

De plus, .

Ainsi, .

Donc, pour  :



Il reste à montrer que 

Déjà,  est continue sur *I* et nulle en *a*.

\* Soit .

Comme *g* est continue en *a*, il existe  tel que .

Alors, pour  tel que , on a : 

(puisque pour )

Donc 

\* Autre démonstration :

Pour tout , on a :

La fonction  est continue sur le segment . Donc, sur ce segment, elle est bien bornée, et elle atteint ses bornes. Il existe donc  tel que .

On a :

 car .

Donc , et *g* est continue en *a*, donc 

D’où .

Dans le cas où  :

Le théorème dit :

Si *f* est continue sur *I* contenant *a* :  où , ce qui est vrai.

Cas particulier : Taylor–Young à l’ordre *n* en 0 :

Soit *f* de classe  sur *I* contenant 0.

Alors .

* 1. L’égalité de Taylor–Lagrange (hors programme)

Théorème :

Soit *f* de classe  sur  et de classe  sur  au moins ()

Alors il existe  tel que :

.

Démonstration :

Soit  définie par :



Où *A* est une constante de sorte que , c'est-à-dire :



Alors  est continue sur , et dérivable sur , et .

Il existe donc  tel que .

Or, pour tout  :



Soit 

Or,  et , donc , d’où l’égalité cherchée.

Remarque : de cette égalité, on tire aisément l’inégalité de Taylor–Lagrange.

* 1. Récapitulation, formules à connaître

Rappel des trois théorèmes à l’ordre *n* en 0 :

Théorème (inégalité de Taylor–Lagrange) :

Soit , où *I* contient 0. Alors, pour tout  :

, avec :



Théorème (Taylor–Young) :

Soit , où *I* contient 0. Alors, au voisinage de 0 :



Théorème (Egalité de Taylor–Lagrange) :

Soit *f*  fois dérivable sur *I* contenant 0.

Alors, pour tout , il existe  tel que :



Formule de Taylor–Young des fonctions usuelles en 0 (de classe  sur un intervalle contenant 0) :

 (ordre *n*)

 (ordre )

Et même  (ordre )

 (ordre )

Et même  (ordre )

 est de classe  sur .



Donc 

Commentaire :

Le cosinus à l’ordre 2 donne :



Donc 

C'est-à-dire 

Cas particulier avec  :



Autre cas particulier : 



(Les termes suivants sont nuls)



Avec 