Géométrie dans un espace affine euclidien

* 1. Généralités en dimension finie
     1. Divers
        1. Définition

Un espace affine euclidien, c’est un espace affine  attaché à un espace vectoriel euclidien *E*.

* + - 1. Repère orthonormé

C’est un repère  où B est une base orthonormée de *E*.

* + - 1. Distances
* Pour , noté .

L’application  est bien une distance :

* *d* est à valeurs dans 
* 
* 
* 
* Si P est une partie non vide de , et *A* un point de , on définit :



* Si  sont deux parties non vides de , on définit :



* + - 1. Notions d’angle, d’orthogonalité,…

Ce sont les notions qui concernent les directions des sous-espaces affines concernés.

Exemple :

Si  sont deux droites affines de directions , l’angle non orienté  est l’angle non orienté .

Remarque :

½ droite : la demi-droite d’origine  et de vecteur , c’est .

L’angle entre deux demi-droites est l’angle entre les vecteurs correspondants.

* + - 1. Projection orthogonale

Soit F un sous-espace affine de .

Soit .

La projection orthogonale de *A* sur F  l’image de *A* par le projecteur orthogonal sur F = l’unique point *H* de F tel que  (c'est-à-dire tel que  où *F* est la direction de F).

Théorème :

La projection orthogonale *H* de *A* sur F est l’unique point de F tel que .

Démonstration :

On note *H* le projeté orthogonal de *A* sur F.

Pour , .

Donc , et il y a égalité si et seulement si .

Et comme , on a bien .

* + - 1. Les hyperplans
* L’hyperplan passant par  orthogonal à , c’est 
* « Réciproque » :

Lignes de niveau de l’application , où  et  :

Pour , la ligne de niveau *k* de l’application , c’est .

On peut introduire *H* sur  tel que . En effet, il suffit de prendre *H* tel que . Alors, pour tout  :



Donc  est l’hyperplan orthogonal à  passant par *H*.

* Cas particulier :

Hyperplan médiateur de deux points distincts :

Soient , distincts.

Soit 

Soit *I* le milieu de .

Alors 

Donc 

Donc , on reconnaît l’hyperplan passant par *I* orthogonal à . On l’appelle l’hyperplan médiateur de *A* et de *B*.

* Distance d’un point à un hyperplan.

Soit H un hyperplan passant par *A* orthogonal à .

Soit  ;  où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur H.

. Donc .

Donc 

* + 1. Les isométries

Définition :

Soit .

*f* est une isométrie de   *f* conserve les distances, c'est-à-dire :



Proposition :

Les isométries de  sont exactement les applications affines de  dans  dont la partie linéaire appartient à  (c'est-à-dire dont la partie linéaire est un automorphisme de *E*)

Démonstration :

* Si *f* est une application affine de partie linéaire , alors, pour tous points , en notant *A*’, *B*’ leurs images par *f*:



* Supposons que *f* conserve les distances.

On admet qu’alors *f* est affine. Soit alors .

Montrons que  conserve les normes (c'est-à-dire que )

Soient , , notons . Alors 

Donc  (en notant avec des ‘ les images par *f*)

Définition :

Un déplacement de  est une symétrie directe de , c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à .

Un antidéplacement de  est une symétrie indirecte de , c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire appartient à .

Proposition :

, ensemble des isométries de , constitue un groupe pour  (un sous-groupe de ), et l’ensemble  des déplacement de  en constitue un sous-groupe.

Exemple :

Les symétries orthogonales sont dans .

En effet, si *f* est la symétrie par rapport à un sous-espace affine F selon *G*, alors *f* est affine, et la partie linéaire de *f* est la symétrie vectorielle par rapport à *F* selon *G* (où *F* la direction de F). En particulier, quand , on dit que *f* est la symétrie orthogonale par rapport à F ; sa partie linéaire est alors la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à *F*, dont on sait qu’elle est dans 

Précision :

Si , , alors *f*, symétrie orthogonale par rapport à F, est un déplacement lorsque  est pair, un antidéplacement sinon.

Cas particulier :

Les réflexions affines (symétries orthogonales affines par rapport à un hyperplan) sont des isométries indirectes.

Proposition :

Etant donnés deux points *A* et *B* de , il existe une et une seule réflexion qui les échange, et c’est la réflexion d’hyperplan l’hyperplan médiateur de *A* et *B*.

* 1. Etude d’un espace affine euclidien orienté de dimension 2

(Un espace affine orienté est un espace affine dont on a orienté la direction)

* + 1. Les isométries en dimension 2
       1. Les isométries directes

Etude :

Soit *f* une isométrie directe, posons  (ainsi,  et ). On sait que  est alors une rotation, éventuellement d’angle nul.

* Premier cas :  est d’angle nul, c’est donc l’identité.

Donc *f* est une translation, éventuellement de vecteur nul.

Réciproquement, les translations sont bien dans .

* Deuxième cas :  est d’angle  non nul (modulo ).

Recherche des points invariants par *f*.

Soit , *O’* son image par *f*.

Soit .

Alors .



On a :



Donc  est injective, donc bijective (on est en dimension finie)

Donc *M* est fixe .

On a donc un et un seul point fixe . (à savoir )

Mais alors : 

Ainsi, .

On dit que *f* est la rotation de centre  et d’angle . Inversement, une telle application est bien un déplacement, c’est celle qui envoie  sur  et de partie linéaire .

Remarque :

Dire que  revient à dire 

Classification de  :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ensemble des invariants | Nature du déplacement |  |
|  |  | Translation de vecteur non nul | Translation |
| Rotation |  | Identité |
|  | Rotation d’angle non nul et de centre |  |

* + - 1. Composée de réflexions

Soit  une réflexion de droite ,  une réflexion de droite .

Si , alors .

Si  et , alors , où  :



Sinon :



 est la rotation de centre  l’intersection des deux droites et d’angle  où  est l’angle orienté 

(Il suffit pour justifier l’angle de raisonner avec les parties linéaires)

Inversement, étant donnée une translation/rotation, on peut fixer une droite  orthogonale au vecteur de translation/passant par  et construire une autre droite de sorte que la composée des deux réflexions soit la translation/la rotation.

Ainsi, tout déplacement est composé de deux réflexions.

Toute isométrie est ainsi composée de réflexions, et même de 0, 1, 2, ou 3 réflexions.

En effet :

Soit .

Si *f* est un déplacement, on a vu qu’il fallait 0 ou 2 réflexions.

Sinon : pour un réflexion *s* quelconque, , donc  est composée de 0 ou 2 réflexions, donc  est composé de 1 ou 3 réflexions.

* + - 1. Les isométries indirectes

Soit .

Posons . Alors .

Donc  est une réflexion vectorielle, disons de droite .

1er cas : *f* a un point fixe *A*.

Alors, pour tout , en notant *M’* son image par *f*, on a :



Donc 



Donc *f* est la réflexion de droite D passant par *A* et de direction *D*.

Inversement, les réflexions sont bien dans 

2ème cas : *f* n’a pas de point fixe.

Soit , posons .

On considère la translation *t* qui envoie *A’* sur *A*.

Alors  laisse *A* invariant, et a pour partie linéaire .

Donc  est la réflexion de droite D passant par *A* de direction *D*

et .



Mais par ailleurs,  s’écrit . Donc .



On note . Alors . Mais *g* a un point fixe (au moins), par exemple . Donc *g* est une réflexion de droite la droite  passant par  (et donc de direction *D*)

Ainsi, , où *g* est une réflexion et  est une translation de vecteur « parallèle » à la droite de la réflexion.



Une telle transformation est évidemment sans point fixe et est bien une isométrie indirecte. On appelle ce type de transformation une réflexion glissée.

Classification :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ensemble des points fixes | Nature de la transformation |
| Direct |  | Translation de vecteur non nul |
|  |  |
|  | Rotation d’angle non nul et de centre |
| Indirect |  | Réflexion de droite D. |
|  | Réflexion glissée (c'est-à-dire  où  est la réflexion de droite D et  la translation de vecteur ) |

* + 1. Géométrie analytique en dimension 2

Soit  un repère orthonormé, direct si besoin.

Une droite a pour équation  dans R, où . Un vecteur normal à D est , un vecteur directeur de D est .

Distance d’un point à une droite :

Soit , . On note 

Soit .

Alors .

Angle de droites :





L’angle non orienté , c’est l’angle non orienté .



Equation de la médiatrice :

Soient , .

L’équation de la médiatrice est donc :

.

* + 1. Les similitudes du plan
       1. Définition

Soit .

*f* est une similitude .

Proposition, définition :

Si *f* est une similitude, alors .

*k* est alors appelé le rapport de la similitude.

Proposition :

Soit , soit .

On a les équivalences :

*f* est une similitude de rapport *k*  *f* est la composée d’une isométrie et d’une homothétie de rapport *k*.

 *f* est affine et sa partie linéaire s’écrit  où 

 *f* conserve les angles non orientés de vecteurs.

Définition, proposition :

Soit *f* une similitude de rapport *k*. Soit  sa partie linéaire.

Alors .

* Si  est dans , on dit que *f* est directes, sinon on dit que *f* est indirecte.
* *f* multiplie les distances par *k*, et les aires par  (admis)
* Si *f* est directe, *f* conserve les angles orientés, sinon elle les retourne.

L’ensemble des similitudes de  est un sous-groupe de .

* + - 1. Etude des similitudes du plan complexe

On se place dans C muni de sa structure euclidienne orientée naturelle où  constitue un repère orthonormé.



* + - * 1. Quelques similitudes
* Translation de vecteur *b* où .



* Symétrie orthogonale (réflexion) par rapport à l’axe réel :



* Homothétie de centre *O* et de rapport  :

.

Homothétie de centre  et de rapport  :

 ()

* Rotation de centre *O* et d’angle  :



Rotation de centre  et d’angle  :



* + - * 1. Les similitudes directes

Proposition :

Les similitudes directes de C sont exactement les applications du type , où .

Démonstration :

* Soient .

*a* s’écrit , où  et .

Alors  est composée de :

 (isométrie directe)

 (translation)

Et  (homothétie)

C’est donc la composée d’une homothétie et d’une isométrie directe, donc une similitude directe.

* Inversement, soit *f* une similitude directe.

Elle est composée d’une homothétie et d’une isométrie directe (c'est-à-dire d’une translation ou rotation), et ces trois applications sont du type  et il est immédiat que l’ensemble des applications du type  est stable par .

Etude :

Soit .

 est fixe 

Si  et , il n’y a pas de point fixe, et  est une translation.

Si  et , *f* est l’identité sur C.

Si , on a un seul point fixe .

Alors , .

Donc .

*a* s’écrivant  où  et , on voit que *f* est la composée, commutative, de l’homothétie de centre  et de rapport  et de la rotation de centre  et d’angle .

Il en résulte que les similitudes indirectes sont les , où .

En effet, si une application *f* s’écrit sous la forme , alors c’est la composée de  et , et est donc une similitude indirecte.

Inversement, si *f* est une similitude indirecte, alors en notant ,  est une similitude directe, disons *g*, et donc *g* s’écrit sous la forme , et , soit .

* + - * 1. Conclusion sur les similitudes directes du plan complexe

|  |  |
| --- | --- |
| Ensemble des invariants | Nature de la similitude |
|  | Translation de vecteur non nul |
| C | Identité |
|  | Similitude directe à centre, c'est-à-dire composée (commutative) d’une rotation de centre  et d’angle  et d’une homothétie de centre  et de rapport  (et ) |

(Résultat valable dans tout plan affine euclidien)

Proposition :

Soient  et  deux segments de longueur non nulle du plan (complexe).

Alors il existe une et une seule similitude directe qui envoie  su  (et plus précisément *A* sur *A’* et *B* sur *B’*)

Démonstration :

Dans C, on introduit les affixes de *A*, *B*, *A’*, *B’*. Soient .

Soit .

Alors *f* convient si et seulement si , c'est-à-dire si et seulement si .

On a donc bien une unique solution , .

*f* est une translation si et seulement si .

Sinon, *f* est une similitude à centre de rapport  et d’angle  :

, donc 

et :



* + 1. Coordonnées polaires

Soit  un plan affine euclidien orienté.

Soit  un repère orthonormé direct de .

Soit  et .

On dit que  est un système de coordonnées polaires de *M* dans le repère R lorsque , où  désigne le vecteur , c'est-à-dire le vecteur unitaire tel que .

Commentaire :

Il résulte de la définition qu’un point *M* a toujours une infinité de systèmes de coordonnées polaires, plus précisément :

* Le point  admet exactement les couples  comme systèmes de coordonnées polaires.
* Un point  admet exactement comme systèmes de coordonnées polaires les couples , où  est une mesure de l’angle orienté .

Equations de courbes en polaire, exemples :

* La courbe *C* d’équation polaire  (relativement à R) est l’ensemble des  tels qu’au moins un des systèmes de coordonnées polaires  de *M* vérifie . Autrement dit, c’est l’ensemble des  tels qu’il existe  de sorte que , c’est donc le cercle de centre *O* de rayon 3.
* Courbe d’équation polaire ,  (puis ) :



* 1. En dimension 3

Ici,  désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d’un repère  orthonormé direct.

(Les antidéplacements sont hors programme en dimension 3)

* + 1. Les déplacements
       1. Etude

Soit ,  sa partie linéaire.

Alors .

C’est donc une rotation, disons d’axe  et d’angle .

* Si , alors , donc *f* est une translation.
* Si  :

- Soit l’ensemble des points fixes de *f* n’est pas vide, disons que *A* en est un.

Alors pour tout ,  est le point *M’* tel que .

Soit D la droite passant par *A* de direction *D*, *H* le projeté orthogonal de *M* sur D.

, donc , donc  est invariant par , donc *H* est invariant par *f* (car ).

Donc .

On dit que *f* est la rotation d’axe  et d’angle  :



D est l’ensemble des points fixes par *f*.

Inversement, une application de ce type est bien une isométrie directe.

- Soit l’ensemble des points fixes est vide :

Soit , *A’* son image.

Considérons alors . Alors *g* a pour partie linéaire  et laisse *A* invariant. C’est donc une rotation d’axe  et d’angle  où D est la droite passant par *A* de direction *D*, et  l’angle de la rotation vectorielle , et on a alors  :



Mais  s'écrit .

Et donc .

Soit P un plan orthogonal à D passant par *A*.

Alors *g* laisse stable P (car *A* est fixe par *g* et  laisse stable  c'est-à-dire )

De même, P est stable par  et  restreinte à P est une isométrie directe de P, à savoir une rotation puisque  n’est pas l’identité. On note alors *B* le point fixe de . Donc *B* est aussi un point fixe de . C’est donc une rotation d’axe  et d’angle  où D’ passe par *B* et a pour direction *D*.

Conclusion :

, où  est une rotation d’axe  et d’angle , et  un vecteur de *D*.



*M* et *M’* n’appartiennent pas au même plan orthogonal à D’ (car ), donc il n’y a aucun point fixe.

On dit que *f* est un vissage (vrai) d’axe , d’angle  et de vecteur .

Classification (tous sont appelés des vissages) :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ensemble des points invariants | Partie linéaire | Nature du vissage |
|  |  | Translation |
|  |  |  |
| D | ,  d’axe  où | Rotation d’axe  d’angle |
|  | ,  d’axe | Vissage vrai d’axe  d’angle , où D est de direction *D*, et de vecteur |

Détermination pratique, exemple :

Reconnaître la transformation  où 

1. C’est une application affine :

C’est en effet l’application affine qui envoie *O* sur  et de partie linéaire l’application , c'est-à-dire l’application linéaire  de matrice  dans .

En effet, cette application affine *f* est telle que :



Soit 

1. Identification de la partie linéaire :

C’est une rotation d’angle  autour de  (ou aussi une symétrie orthogonale par rapport à , appelé aussi retournement d’axe )

C’est une isométrie directe (car  donc )

Donc *f* est un déplacement. Comme , *f* est soit un vissage vrai, soit une rotation d’axe dirigé par .

1. Recherche des points invariants :

 est invariant 

On n’a donc aucun point invariant, c’est donc un vissage vrai.

1. Caractérisation de l’axe, du vecteur d’un vissage vrai :

Soit *f* un vissage d’axe  d’angle  et de vecteur .

, et  n’est autre que  lorsque *M* est un point de D.

Dans ce cas là, .

Donc 

Donc l’axe est la droite de direction  passant par .

Composée de deux réflexions :

- Si , alors , où  (éventuellement l’identité si )



- Sinon :



,  est la rotation de droite D et d’angle .

Remarque :

Un vissage vrai est composé de quatre réflexions, et pas mieux car sinon ce serait 2 (c’est un déplacement, donc sa partie linéaire est une isométrie directe), et se serait donc soit une translation, soit une rotation.

* + 1. Géométrie analytique en dimension 3

Equation de plan :

, où .

Un vecteur normal à P est 

On a les équivalences, pour tout point  :



Où *H* est tel que  avec .

Intersection de deux plans :



On note , .

Si , alors .

Si , alors  est une droite, et  dirige cette droite.

En effet :

, donc , et  donc .

Donc  et D est une droite (car ).

Distance d’un point à un plan :

Soit  un vecteur normal à un plan P.

.

, et .

. Donc 

Ainsi, , soit .

Distance d’un point à une droite :



. On a .

Donc  (car ).

Donc .

* + 1. Coordonnées cylindriques et sphériques
       1. Coordonnées cylindriques

Définition :

Soit , de coordonnées (cartésiennes)  dans R.

On appelle système de coordonnées cylindriques de *M* relativement au repère R tout triplet  de  vérifiant .

Ainsi, en notant, pour chaque , , et en notant, pour chaque , *m* sa projection orthogonale sur le plan , on a les équivalences :

 est un système de coordonnées cylindriques de *M* relativement à R  est un système de coordonnées polaires de *m* relativement au repère  de  et *z* est la côte de *M* dans le repère R.

Et donc tout point *M* de  admet une infinité de systèmes de coordonnées cylindriques :

* Si , ils sont du type , avec  quelconque.
* Si , on obtient l’un d’entre eux en posant :

,  (dans  orienté par ), *z* la côte de *M*.

Et les autres sont les  et  avec  quelconque.

Remarque :

Avec le choix précédent de *r* et  (si ), on a :

, , .



* + - 1. Coordonnées sphériques

Définition :

Soit , de coordonnées (cartésiennes)  dans R.

On appelle système de coordonnées sphériques de *M* relativement au repère R tout triplet  de  vérifiant :

, , .

Etude :

Soit , de coordonnées cartésiennes  dans R. On note toujours *m* la projection orthogonale de *M* sur le plan .

Dire que  est un système de coordonnées sphériques de *M* revient à dire que :

(1)  est un système de coordonnées polaires de *m* relativement à  dans  et .

- Si , (1) impose que , donc que . Réciproquement, tout triplet  tel que  est alors bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

- Si , mais , (1) impose que  et . Réciproquement, tout triplet  vérifiant cela, c'est-à-dire du type :

 ou  ( quelconque)

est bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

- Enfin, si  et si  désigne un système de coordonnées polaires de *m* relativement au repère  du plan , (1) impose que :



Réciproquement, tout triplet  vérifiant cela est bien un système de coordonnées sphériques de *M*.

Il en résulte que tout point *M* de  admet une infinité de systèmes de coordonnées sphériques.

Remarque :

Si  est un système de coordonnées sphériques de *M*, on a toujours :



En effet : 

Recherche d’un système particulier de coordonnées sphériques pour .

Soit , on suppose ici que  et on note toujours *m* sa projection orthogonale sur , et  les coordonnées cartésiennes de *M* dans R.

Posons .

Soit  l’angle non orienté  :

Alors on a bien .

De plus, on a , donc 

Donc, comme  et  (car ), on a 

Soit maintenant  l’angle orienté  dans  orienté par .

Alors on a bien 

Et finalement  est un système de coordonnées sphériques de *M*.



Remarque :

Comme on a supposé que , on a en fait  et .

 vérifient les relations :

, , , .

Ainsi, on a trouvé un système de coordonnées sphériques de *M* tel que :



D’après l’étude, les autres systèmes de coordonnées sphériques de *M* sont les triplets :



Et remarquons que tout point de , qu’il soit sur l’axe  ou non, admet un système de coordonnées sphériques  avec ,  et .

Mais on ne doit pas pour autant se limiter à de tels systèmes, car cela soulèverait des problèmes dans les équations en coordonnées sphériques (continuité par exemple).