**Géométrie dans l’espace – Mesure, aire et volume**

1. ***Théorie***

Un ***polyèdre*** est un solide délimité par des faces qui sont des polygones.

L’intersection de 2 faces est une ***arête*** et l’intersection de 2 arêtes est un ***sommet***.

Un ***cube*** a 6 faces carrées.

Un ***parallélépipède rectangle*** (ou pavé droit) a 6 faces rectangulaires.

Un prise droit est un polyèdre ayant 2 faces superposables, les autres étant des rectangles.

Un ***tétraèdre*** est un polyèdre à 4 faces triangulaires.

La ***pyramide*** est un polyèdre dont une face est un polygone convexe et dont les autres faces sont des triangles dont un coté est un coté de la base et qui ont un sommet commun.

Ne sont pas des polyèdres les solides comme le ***cylindre*** (deux faces qui sont des disques superposables), le ***cône*** (une face est un disque), la ***sphère*** (« boule »).

Les solides peuvent se représenter par ***projections*** (cylindriques ou coniques), par ***perspective cavalière*** (plan de projection parallèle à une face du solide – angles à 45° et rapport de 0,5), ***perspective axonométrique*** (pas de parallélisme entre le plan et l’une des faces), ***perspective artistique.***

Le ***patron*** d’un solide est une figure géométrique plane telle que uniquement par pliage on puisse obtenir ce solide, sans chevauchement de faces.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***Rectangle*** | ***Carré*** | ***Cercle*** | ***Losange*** | ***Parallélogramme*** | ***Triangle*** | ***Triangle rectangle*** | ***Trapèze*** |
| Périmètre | (L+l) x 2 | 4c | Pi 2 r |  |  |  |  |  |
| ***Aire*** | L x l | c² | Pi r² | (Dxd)/2 | C x h | (cxh)/2 | (axb)/2 | (B+b)x h / 2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***Pavé droit*** | ***Cube*** | ***Prisme droit (cylindre)*** | ***Pyramide, cône*** | ***sphère*** |
| Volume | L x l x h | C3 | A x h | 1/3 A x h | 4/3 Pi r3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Kilomètre* | 1.000 m | Km² | 1.000.000 m² |
| ***Hectomètre*** | 100 m | Hm² | 10.000 m² |
| ***Décamètre*** | 10 m | Dam² | 100 m² |
| ***Mètre*** | 1 m | M² | 1 m² |
| ***Décimètre*** | 0,1 m | Dm² | 0,01 m² |
| ***Centimètre*** | 0,01 m | Cm² | 0,0001 m² |
| ***Millimètre*** | 0,001 m | Mm² | 0,000001 m² |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Hectare | Ha | 100 a | 1 hm² | 10.000 m² |
| ***Are*** | A | 1 a | 1 dam² | 100 m² |
| ***Centiare*** | Ca | 0,01 a | 1 m² | 1 m² |

Des grandeurs peuvent être ***mesurables*** ou non. Pour les mesurer, on peut procéder directement, avec un objet intermédiaire ou via une transformation licite.

Le ***mesurage*** constitue une solution simple. On mesure une grandeur ***a*** avec une unité ***u***.

Pour mesurer une ***aire***, on choisit le nombre d’unités nécessaires pour recouvrir exactement, sans chevauchement, l’aire en question. Pour un ***volume***, on prend le volume d’un solide donné. Pour un ***angle***, on prend un angle donné. Une mesure est toujours ***positive***.

1. ***Didactique***

L’élève n’identifie que la face avant d’un solide (pas de représentation en relief), il ne compte que les faces visibles. Les représentations évoluent avec les ages.

A 3-4 ans, le dessin a une signification mais est gêné par l’incapacité motrice. Seule la topologie de voisinage est respectée (positions relatives) mais pas toujours dans le détail (on dessine les doigts juste après les bras sans mettre de mains).

A 5-7 ans, l’enfant dessine ce qu’il sait davantage que ce qu’il voit (dessin d’un poussin dans un œuf).

A 8-9 ans, l’enfant cherche à respecter proportions, mesures et distances.

Les difficultés dans la construction de patrons : est ce que l’objet est présent ou non ? est ce qu’on peut le manipuler ? est ce qu’il est présenté en perspective ?

Notons qu’il y a plusieurs patrons possibles pour un même solide.

Il faut pouvoir repérer des grandeurs en les superposant, en utilisant un objet intermédiaire, en utilisant une grandeur donnée, en utilisant un double décimètre.

Il faut savoir faire des conversions d’unités, mesurer des périmètres.

Les variables didactiques sont la nature des objets, la taille des objets, le fait qu’ils soient déplaçables/transformables ou non, la possibilité d’utiliser du matériel, le support papier.

Il faut pouvoir comparer des aires par superposition, découpage et recollement, en utilisant une unité de mesure, en utilisant les formules adaptées, en décomposant une figure en figures simples et donc en procédant à des soustractions.

# Géométrie plane

1. ***Théorie***

Une ***droite*** se note (AB), une ***demi-droite*** se note [AB), un ***segment*** se note [AB].

Une infinité de droites passent par un point, une seule droite passe par deux points, un segment comporte une infinité de points.

Pour le ***cercle***, la distance entre le centre et un point du cercle est le ***rayon***, sinon, la distance entre deux points opposés passant par le centre est le ***diamètre***.

Deux autres points reliés entre eux forment une ***corde*** (mais le diamètre en est une).

Une portion délimitée par une corde forme un ***arc de cercle*** (en fait, elle en délimite deux !).

Deux cercles sont ***sécants*** s’ils se coupent en deux points sinon ils sont ***tangents*** (intérieurement ou extérieurement).

Deux droites sont ***perpendiculaires*** si elles forment un angle droit.

Deux droites sont ***parallèles*** si elles n’ont aucun point commun ou si elles sont confondues.

La ***médiatrice*** d’un segment est l’ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment, c’est une droite qui est perpendiculaire à ce segment.

Un ***angle*** est une portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine.

Il est ***aigu*** s’il est plus petit qu’un angle droite et ***obtus*** s’il est plus grand (mais jusqu’à 180°).

Il est ***saillant*** s’il est inférieur à un angle plat et ***rentrant*** s’il est supérieur.

Deux angles sont ***complémentaires*** si leur somme vaut 90° et ils sont ***supplémentaires*** si leur somme vaut 180°. Un angle ***plat*** permet de démontrer que des points sont alignés.

Ils sont ***adjacents*** s’ils sont de part et d’autre du coté qu’ils ont en commun.

Ils peuvent être ***opposés par le sommet*** (ils sont égaux), ***alternes-internes*** (lors de droites parallèles, ils sont égaux) et ***alternes-externes*** (lors de droites parallèles, ils sont égaux).

La ***bissectrice*** sépare l’angle en deux angles égaux.

Un ***angle au centre*** dans un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle sinon il s’agit d’un ***angle inscrit***.

Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Un polygone est ***convexe*** s’il est situé tout entier du même coté de toutes les droites support de ses cotés, sinon il est ***concave***. Si deux de ses droites se coupent, il est ***croisé***.

Un polygone est ***régulier*** si ses côtés sont égaux et qu’il est inscriptible dans un cercle (carré, hexagone, octogone).

Dans un triangle, la longueur d’un des cotés est inférieur à celle des deux autres.

Dans un triangle, la somme des angles fait 180°.

La ***hauteur*** est la droite perpendiculaire à un côté qui passe par le sommet opposé, le point de rencontre est ***l’orthocentre***.

La ***médiane*** est la droit qui passe par le milieu d’un coté et le sommet opposé, le point de rencontre est le ***centre de gravité*** (et les médianes se coupent à 2/3-1/3).

La ***médiatrice*** est la médiatrice des cotés, le point de rencontre est le ***centre du cercle circonscrit***.

La ***bissectrice*** est celle des 3 angles, le point de rencontre est le ***centre du cercle inscrit***.

Dans un ***triangle rectangle***, le coté opposé à l’angle droit est ***l’hypoténuse*** (ici, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l’hypoténuse).

Dans un ***triangle isocèle***, la hauteur issue du sommet principal est aussi médiane, médiatrice et bissectrice. De plus, les angles à la base sont égaux.

Dans un ***triangle équilatéral***, toute hauteur est aussi médiatrice, médiane, bissectrice et les angles font tous 60°.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***Carré*** | ***Rectangle*** | ***Losange*** | ***Parallélogramme*** | ***Trapèze*** | ***Trapèze rectangle*** | ***Trapèze isocèle*** |
| ***Axes symétrie*** | Diagonales, médianes | Médianes | Diagonales | - | - | - |  |
| ***Centres symétrie*** | Centre du carré | Centre du rectangle | Centre du losange | Croisement des diagonales | - | - | - |
| ***Cotés parallèles*** | Cotés opposés parallèles 2 à 2 | Cotés opposés parallèles 2 à 2 | Cotés opposés parallèles 2 à 2 | Cotés opposés parallèles 2 à 2 | Petite base et grande base | Petite base et grande base | Petite base et grande base |
| ***Cotés de même longueur*** | Les 4 | Cotés opposés égaux 2 à 2 | Les 4 | Cotés opposés égaux | - | - | Cotés autres que les bases de même longueur |
| ***Diagonales*** | De même longueur, se coupent en leur milieu et à angle droit | De même longueur, se coupent en leur milieu | Se coupent en leur milieu et à angle droit | Se coupent en leur milieu | - | - | De même longueur |
| ***Angles*** | 4 angles droits | 4 angles droits | Les angles opposés sont égaux, les consécutifs sont supplémentaires | Les angles opposés sont égaux | - | 2 angles droits | Angles des bases égaux |

1. ***La démonstration en géométrie***

Parmi les propriétés plus « rares » à connaître :

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l’hypoténuse est le centre du cercle circonscrit (la médiane issue du sommet de l’angle droit est égale à la moitié de l’hypoténuse).

Si un point M est sur le cercle de diamètre [AB] alors (AM) est perpendiculaire à (MB).

Si dans un triangle (ABC), une droite passe par les milieux (M et N) des 2 cotés [AB] et [AC] alors elle est parallèle au troisième coté (BC), de plus MN = ½ BC.

Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d’un coté et est parallèle à un 2ème coté, alors elle coupe le 3ème en son milieu.

Si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l’angle au centre est double de celle de l’angle inscrit.

Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont égaux.

1. ***Pythagore et Thalès***

Pythagore : Si un triangle est rectangle, alors le carré de l’hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l’angle droit. Si ABC est rectangle en A, alors AB² + AC² = BC².

Cas particuliers ou la diagonale d’un carré est aV2 et de la hauteur d’un triangle équilatéral qui est aV3/2

Thalès : AB/A’B’ = AC/A’C’ = BC/B’C’ ou encore que AB/AC = A’B’=A’B’/A’C’

La réciproque est que si dans un triangle ACD, on a 2 points B et E qui appartiennent respectivement aux segments [AC] et [AD] et tels que AB/AC = AE/AD, alors (BE) est parallèle à (CD).

1. ***Les transformations***

La ***symétrie axiale*** : un point M’ est le symétrique de M par rapport à une droite (D) si (D) est la médiatrice de MM’ (ou le point M lui-même si M est sur (D)).

La symétrie axiale conserve les longueurs, l’alignement, les angles et les milieux.

Pour chercher un axe de symétrie ou pour en vérifier un, on utilise le pliage.

La ***symétrie centrale*** : un point M’ est le symétrique de M par rapport à un point C si C est le milieu de MM’ (ou le point M lui-même si M et C sont confondus).

La symétrie centrale conserve les longueurs, l’alignement, les angles et les milieux.

La ***rotation*** se fait en sens direct (sens inverse de la montre et angle positif) ou indirect : étant donné un point C et un angle $, l’image du point M est le point M’ tel que CM’ = CM et l’angle (CM, CM’) = $ (ou le point M lui-même si M est en C). On la note : R (C, $).

La rotation conserve les longueurs, l’alignement, les angles et les milieux.

La ***translation*** fait appel aux ***vecteurs*** (caractérisés par un sens = la flèche, une direction = l’inclinaison, une longueur) : étant donné un vecteur AB, l’image de M par translation de vecteur AB est le point M’ tel que MM’ = AB. Cette translation est notée tAB. On note M’=tAB (M).

La translation conserve les longueurs, l’alignement et les milieux.

L’***homothétie*** agrandit ou rétrécit les figures. Soit un nombre k et un point C, l’image de M par l’homothétie de centre C et de rapport k est le point M’ tel que M’ est sur la demi-droite [CM) et CM’ = kCM. On la note : H (C, k).

L’homothétie conserve l’alignement et les milieux.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ***Axe*** | ***Centre*** |
| **Droite** | Toute perpendiculaire | Tout point |
| ***Segment*** | Médiatrice | Milieu de [AB] |
| ***Triangle*** | - | - |
| ***Triangle rectangle*** | - | - |
| ***Triangle isocèle*** | Médiatrice de la base | - |
| ***Triangle équilatéral*** | Trois hauteurs | - |
| ***Trapèze*** | - | - |
| ***Trapèze isocèle*** | Milieu des bases | - |
| **Parallélogramme** | - | Croisement des diagonales |
| ***Rectangle*** | 2 médiatrices | Croisement des diagonales |
| ***Losange*** | Diagonales | Croisement des diagonales |
| ***Carré*** | Diagonales et médiatrices | Croisement des diagonales |
| ***Hexagone*** | 6 axes | Centre cercle circonscrit |
| ***Cercle*** | Tous les diamètres (infinité) | centre |

1. ***Didactique***

Les élèves peuvent se tromper sur l’identification de droites perpendiculaires (si elles ne sont pas positionnées de manière verticale/horizontale comme c’est le cas dans nombreuses situations de la vie courante). Par la même, on n’identifiera pas les quadrilatères à angle droit s’ils ne sont pas sur un plan horizontal.

Il peut y avoir aussi une mauvaise utilisation de l’équerre (mauvais coté de l’angle droit).

Pour les reproductions de dessin par quadrillage, il faut savoir repérer des points entre eux, tracer des segments (cycle 2 ou 3). Le contrôle peut se faire avec calque ou gabarit, voire mesure à la règle (cycle 3). On peut utiliser une stratégie globale (repérer les sommets et tracer les segments après) ou alors une stratégie locale (faire la figure par morceaux).

L’élève peut reproduire une figure (il y a le modèle) ou la construire (pas de modèle), il doit savoir reconnaître des figures de base (qui ne sautent pas toujours aux yeux, notamment de par leur position).

Les variables didactiques sont les suivantes : taille de l’espace, support (papier blanc ou quadrillé), instruments permis (calque, gabarits, règle, équerre, compas…), spécificité des objets à analyser (complexité, orientation, surfigures ou non…), proximité de la figure à reproduire.

Les élèves peuvent avoir des difficultés à se représenter les objets géométriques : si on demande de placer des points à égale distance d’un autre, ils ne voient pas qu’il s’agit d’un cercle – il y a aussi difficulté à distinguer droite et segment (un point sur une droite alors que la droite n’est pas tracée entièrement jusqu’au point en question).