Le symbole Σ

* 1. Généralités
     1. Définition

Définition :

Soit 

On note 

Noté aussi  ou .

Plus généralement :

Si  est une famille de complexes indexée par un ensemble fini *I* quelconque,  désigne la « somme des , *i* décrivant *I* »

(Se donner une famille  indexée par *I*, c’est se donner pour chaque  un complexe  ; cela correspond à une application de *I* dans C. Cela peut servir pour le repérage)

Cette définition est possible parce que + est associative et commutative. Par exemple, on peut définir aussi  (produit des ), mais on ne peut pas définir  comme étant la différence des  (dans quel ordre les prendre ?)

On convient que , et .

* + 1. Premières propriétés
* Si  et  sont deux familles indexées par un même ensemble fini *I*:



* Si *J* et *J* sont deux ensembles finis disjoints, et si  est une famille de complexes indexée par  :



* Si  est une famille de complexes indexée par un ensemble fini *I*, et pour  :



* + 1. Exemples
* On a vu : 
* 
* 

Démonstration par récurrence :

* Vrai pour 
* Si c’est vrai pour *n*:



Ce qui achève la récurrence.



* 1. Sommes « doubles »

On s’intéresse ici au cas  lorsque la famille  est indexée par une partie finie *K* de .

Autrement dit, les indices dans la somme sont des couples d’entiers.

Pour ,  est noté  ou même .

On s’intéresse donc à une somme du type  où *K* est une partie finie de .

* + 1. Un cas particulier simple

. On note alors :

« somme des  pour *i* entre 1 et *n* et *j* entre 1 et *p* ».

Alors :



Visualisation :



Convention habituelle :

Dans un tableau,  est sur la ligne n°*x*, la colonne n°*y*.

Ainsi, faire , c’est sommer par ligne (et  par colonne)

* + 1. Deuxième cas particulier





|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i\j | 1 | 2 | 3 |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

* + 1. Cas général

Remarquons que *K* est une partie finie de . Il existe donc  tel que .



(L’ensemble des points représente *K*)

 où 

Ici, , 

De même,  où 

* 1. Changement de variable

Proposition :

Soit  une famille de complexes indexée par un ensemble fini *I*. On suppose que *J* est un autre ensemble fini, et que  est une bijection de *J* sur *I*.

Alors . On dit qu’on fait le changement de variables «  ».

Justification :

Les  pour *j* décrivant *J* donnent tout les *i* de *I* (car  est surjective) et chacun une seule fois (car  est injective). Les termes des deux sommes sont donc les mêmes à l’ordre près.

Exemple :



* 1. Exemples classiques



* Calcul des sommes  ; on sait déjà que :



On a :



D’où , et ainsi, .

De même : , d’où 

Et :



Donc :



Pour obtenir  en connaissant les précédents, on fait de la même façon…

* Produit de sommes :



* Produit de deux expressions polynomiales :



* Somme de termes en progression arithmétique :

On s’intéresse à  lorsqu’il existe *r* tel que .

A retenir :  nombre de termes  somme des extrêmes.

En effet : 

Et 



Donc 

Donc 

* Somme de termes en progression géométrique :

On s’intéresse à  lorsqu’il existe *q* tel que 

A retenir : 

Le cas où  est trivial :



Sinon, pour  :





Donc 

Donc 

Rapides compléments sur Z et Q

* 1. Sur Z.
* , lois +, , relation d’ordre  connus.
* Toute partie non vide et majorée de Z admet un plus grand élément.

Toute partie non vide et minorée de Z admet un plus petit élément.

Démonstration :

1. Soit *A* une partie non vide et majorée de Z.

1er cas : . Alors *A* contient des éléments positifs, et par conséquent les majorants de *A* sont des éléments de N, et  est une partie non vide et majorée de N.  admet donc un plus grand élément, disons .

Alors  est aussi le plus grand élément de *A*, puisqu’il est élément de *A*, et il est plus grand que les éléments positifs de *A*, et, étant positif, il est aussi plus grand que les éventuels éléments négatifs de *A*.

2ème cas : . Dans ce cas, *A* est une partie non vide de . Notons . *B* est alors une partie non vide de N, donc admet un plus petit élément, disons . Il est alors clair que  est le plus grand élément de *A*.

1. Soit *A* une partie non vide et minorée de Z, et soit .

Alors *B* est une partie non vide et majorée de Z, donc *B* admet, d’après (1), un plus grand élément, disons . Alors il est immédiat que  est le plus petit élément de *A*.

* Division euclidienne dans Z :

Soit . Alors il existe un unique couple  tel que :

 et 

Démonstration :

* + Unicité : Si  et  conviennent, alors , et , d’où il résulte que , puis 
  + Existence :

1er cas : ,  : le couple  fourni par le théorème dans N convient.

2ème cas : ,  : selon le théorème de la division euclidienne dans N appliqué au couple , on peut introduire  tel que  et .

Alors . Si , le couple  est comme voulu. Sinon, si , le couple  convient.

3ème cas :  ; on applique ce qui précède au couple , il existe alors un couple  tel que  et  ; le couple  convient.

* 1. Sur Q.

Théorème :

Soit . Il existe un et un seul couple  tel que  et .

Relations d’ordre

Dans tout ce qui suit, *E* désigne un ensemble quelconque.

* 1. Généralités
     1. Relations binaires

Une relation binaire définie sur *E* est une propriété que chaque couple  d’éléments de *E* est susceptible d’avoir ou non.

Si *R* désigne une relation binaire définie sur *E*, on note  pour signifier que *x* et *y* sont en relation par *R*.

Ainsi, se donner une relation binaire *R* sur *E*, c’est se donner la partie *G* de  constituée des couples  tels que .

Exemples :

* Sur l’ensemble R des nombres réels, on connaît les relations usuelles :



(on peut aussi considérer les restrictions de ces relations à Q, Z, N…)

* Sur l’ensemble Z des entiers relatifs, on peut penser à la relation de divisibilité



On peut aussi imaginer (sur Z) la relation  définie par  est pair

* Sur l’ensemble  des parties d’un ensemble , on connaît la relation d’inclusion, on peut aussi imaginer la relation définie par : 
  + 1. Relations d’ordre

|  |
| --- |
| Définition :  Soit *R* une relation binaire définie sur *E*. *R* est une relation d’ordre lorsque :   * *R* est réflexive, c'est-à-dire : * *R* est transitive, c'est-à-dire : * *R* est antisymétrique, c'est-à-dire : |

Exemple :

En reprenant les relations binaires précédentes :

 sont des relations d’ordre sur R (et sur Q, Z, N…)

 n’en sont pas.

 ne sont pas des relations d’ordre sur Z, mais  en est une sur N.

 est une relation d’ordre sur , mais pas .

* + 1. Ordre total, ordre partiel

Soit *R* une relation d’ordre sur *E*. On dit que *R* définit un ordre total sur *E* lorsque deux éléments de *E* sont toujours comparables pour *R*, c'est-à-dire : .

Dans le cas contraire, on parle d’ordre partiel.

Exemples :

 définit un ordre total sur R (et sur Q, Z, N…)

 définit un ordre partiel sur N.

 définit un ordre partiel sur .

* 1. Vocabulaire dans un ensemble ordonné

Dans tout ce paragraphe,  désigne une relation d’ordre quelconque sur *E*.

* + 1. Maximum, minimum

Proposition, définition :

Soit *A* une partie de *E*. S’il existe un élément *a* de *A* tel que , alors il n’en existe qu’un seul, et on l’appelle le maximum de *A* (ou le plus grand élément de *A*), noté . La définition est analogue pour le minimum (ou plus petit élément)…

Attention, il n’y a pas nécessairement existence !

Exemple :

Pour la relation usuelle  dans R,  et N n’ont pas de maximum.

Pour la relation de divisibilité dans N,  non plus.

* + 1. Majorants, minorants

Définition

Soit *A* une partie de *E*, et soit . On dit que *z* est un majorant de *A* (dans *E*) lorsque 

La définition est analogue pour le minorant.

Attention, il n’y a pas toujours existence, ni unicité !

D’ailleurs, si *z* majore *A*, alors tout élément *z*’ de *E* tel que  majore aussi *A*.

Remarque :

On a l’équivalence : 

Une partie *A* est dite majorée (respectivement minorée) lorsqu’elle admet au moins un majorant (respectivement minorant), et enfin est dite bornée lorsqu’elle est à la fois majorée et minorée.

* + 1. Borne supérieure, borne inférieure

Définition :

Soit *A* une partie de *E*. Si *A* est majorée, et si l’ensemble des majorants de *A* admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la borne supérieure de *A*, notée .

La définition est analogue pour l’éventuelle borne inférieure :

Si *A* est minorée, et si l’ensemble des minorants de *A* admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la borne inférieure de *A*, notée .

Attention, il n’y a pas toujours existence.

Remarque :

Si *A* admet un maximum, alors *A* admet une borne supérieure, et  mais *A* peut très bien avoir une borne supérieure sans avoir de maximum.

En effet :

Supposons que *A* admette un maximum, disons *a*. On note *S* l’ensemble des majorants de *A* (*S* n’est pas vide puisqu’il contient *a*).

Soit .

Alors  puisque  et *b* est un majorant de *A*.

Ainsi, . donc *a* est le minimum de *S*.

Donc *a* est la borne supérieure de *A*.

* + 1. Notations

Soit , où *D* est un ensemble quelconque. (*E* est toujours ordonné par )

Si l’ensemble image  admet une borne supérieure, on l’appelle la borne supérieure de *f* et on la note  ou .

Soit  une famille d’éléments de *E* indexée par un ensemble *I* quelconque. Si l’ensemble  admet une borne supérieure, on la note .

Les notations sont analogues pour les éventuels max, min, inf.

* + 1. Applications croissantes, décroissantes etc.

Ici, on considère deux ensembles ordonnés  et 

Définition : Soit 

*f* est croissante lorsque 

*f* est décroissante lorsque 

Et, en notant "" pour " et ", "" pour " et " :

*f* est strictement croissante lorsque 

*f* est strictement décroissante lorsque 