Longueur et courbure d’un arc paramétré

Ici, P désigne un plan affine euclidien, muni d’un repère  orthonormé (voire direct si besoin)

*I* désigne un intervalle infini de R.

 est un arc paramétré de classe  où , et on note .

* 1. Changement admissible de paramètre

Proposition, définition :

Soit  une bijection de classe , et de réciproque  d’un intervalle *J* de R vers *I* (on dit que  est un difféomorphisme  de *J* vers *I*). Ce qui revient à dire que ,  est ,  ne s’annule pas et que .

Soit  l’arc paramétré .

Alors  a essentiellement les mêmes propriétés que .

On dit alors que  définit un changement admissible de paramètre sur l’arc .

Plus précisément :

*  a la même classe et le même support que .
* Soit , et notons .

 est un point multiple de  si et seulement si c’est un point multiple de 

Le point  est stationnaire sur  si et seulement si  est stationnaire sur .

Il y a une tangente en  sur  si et seulement si il y a une tangente en  sur , et dans ce cas c’est la même.

 est birégulier sur  si et seulement si  est birégulier sur . Etc.

Explications :



- La classe de , c’est la classe de , c'est-à-dire de . Comme  est de classe  et  est de classe  aussi,  est bien de même classe que .

- Le support de , c’est 



- Si  avec  :

Soient  tels que  et .

Alors , et .

Inversement, si  avec ,

Alors  et  (car  est injective)

- 

Soit  (1) (avec )



- 

Soit  (2) (avec )

(1) et (2) montrent que  est libre si et seulement si  l’est :

(En notant toujours )

Supposons que  est libre.

Soient maintenant , supposons que .

Alors .

Donc, comme  est libre,  et 

Donc, comme , , puis .

Supposons maintenant que  est liée.

Soit alors  tel que .

Si , alors  (car alors ), et donc , donc  est liée.

Si , alors , et donc :



C'est-à-dire , et , donc  est liée.

D’où l’équivalence pour la birégularité.

Cela montre aussi que si  est stationnaire mais , alors  est stationnaire, mais avec  et colinéaire à .

On admet que c’est vrai dans tous les autres cas…

Simplification des notations :

* On enlève les chapeaux, ce qui revient à ne plus distinguer dans les notations  et .
* On se repère alors avec les noms de variables.
*  est notée .

Les formules (1) et (2) deviennent alors :

 où .

Ou encore .



Exemple :

, 



* 1. Longueur d’un arc compact  au moins

Soit  un arc de classe , où .

Par définition, longueur de 

Explication :

Version physique…

Version mathématique :

Pour , on introduit , subdivision régulière de  (soit )

On introduit les .

Soit 

L’inégalité de Taylor–Lagrange à l’ordre 1 pour  (de classe ) donne :

 où 

Ainsi, 

Donc 

Donc 

Donc, en sommant pour *i* de 1 à *n*:



Remarque :

 dépend à priori de  (c'est-à-dire du paramétrage) et pas seulement du support.

Pour calculer une longueur d’une courbe géométrique simple : être raisonnable (en particulier, ne pas avoir de points doubles autres qu’en des points isolés)

Exemples :



, .



Donc  (si on avait pris , on aurait eu le même support, mais  : d’où l’utilité de ne pas avoir « trop » de points doubles)

Ellipse : , 



 (Pas de formule simple)

Formules :

Si , alors 

Cas particulier : pour une courbe d’équation , dont un paramétrage est : , on a 

Par exemple, avec .

Longueur de l’arc de parabole entre les points d’abscisse 0 et  :



* 1. Abscisse curviligne

On suppose toujours  de classe  au moins.

* + 1. Définition

On appelle abscisse curviligne sur  toute primitive de .

Ainsi, une abscisse curviligne sur , c’est une fonction , dérivable, telle que . Si *S* en est une, on a donc, pour tous  :

 : longueur (algébrique par rapport au sens des *t* croissants) de l’arc de courbe situé entre les points de paramètre  et .

Si *S* est la primitive de  nulle en un certain ,  est alors la longueur algébrique de l’arc situé entre  et .

Ainsi, si ,  est l’abscisse curviligne nulle en *a*.

* + 1. Paramétrisation admissible avec l’abscisse curviligne

Ici, et jusqu’à la fin du chapitre,  est un arc régulier de classe .

Dans ce cas,  est de classe  :

 est de classe , et comme  ne s’annule pas,  a la même classe.

Ainsi, si *S* est une fonction abscisse curviligne, *S* est alors de classe  sur *I*. Sa dérivée,  ne s’annule pas et garde donc un signe constant. Donc *S* réalise une bijection de *I* vers un intervalle *J*. Comme sa dérivée ne s’annule pas, c’est donc un difféomorphisme de classe  de *I* vers *J*. Cela correspond donc à un changement admissible de paramétrage sur  (pour )

On note 

Exemple :



On prend comme origine d’abscisse curviligne .

Le point  correspond dons au point d’abscisse curviligne *s*. On a alors un mouvement uniforme (), et même .

Proposition :

, où  (rappel :  est la tangente à la courbe, orientée, en  et )

En effet, 

Où .

On retiendra :



Ou encore, avec les notations simplifiées :

.

* 1. Repère de Frenet, courbure
     1. Repère de Frenet



Le repère de Frenet en un point *M* de la courbe est, par définition :  où  est tel que ce repère soit orthonormé direct.

Attention : *M*,  et  « bougent » et sont fonctions, au choix, de *t* ou *s*.

Remarque :  est fonction de classe  de *t* (ou de *s*). On introduit les fonctions *a* et *b* de classe  telles que .

Alors , donc  est aussi de classe .

* + 1. Dérivées des vecteurs  et  (en tant que fonctions de *s*)



En effet, .

Donc 

Il existe donc  tel que  (dépendant de *s*).

 s’appelle la courbure algébrique au point *M* considéré.

 (même raisonnement)

Il existe alors  tel que 

Mais .

La dérivation donne alors , c'est-à-dire .

Donc .

* + 1. Composantes de  et  dans le repère de Frenet

 et .



Ainsi : , 

Il en résulte que *M* est birégulier si et seulement si  (puisque déjà *M* est régulier, donc )

Commentaires (en supposant ) :



. Or,  est l’accélération pour le paramétrage avec *s*. Il doit donc être dirigé dans la concavité de la courbe.

De plus, en considérant toujours le mouvement uniforme correspondant au parcours avec *s*, « on sait » (intuitivement) que  est d’autant plus grand que c’est « courbe », puisque plus c’est courbe, plus l’accélération normale est importante.

Explication plus précise du mot courbure (toujours avec ) :



On note  : rayon (algébrique) de courbure en *M*.

L’accélération normale est alors , c'est-à-dire celle qu’on obtient pour un mouvement sur un cercle de rayon *R*.

Soit  tel que .  s’appelle le centre de courbure au point *M*.

Le cercle de centre  et de rayon  (passant par *M*) s’appelle le cercle osculateur à la courbe en *M*. C’est celui qui est « le mieux » tangent à la courbe (voir fin du cours)

* + 1. Autre formule

Théorème « de relèvement » (admis) :

Soit  une fonction vectorielle de classe  () sur un intervalle *I*, à valeur sur un R-ev euclidien orienté de dimension 2, muni d’une base orthonormée .

On suppose que .

Alors il existe une fonction  de classe  telle que :



En d’autres termes, on peut trouver une mesure  de l’angle orienté  de sorte que  soit de classe .

Ici, la fonction  est de classe  et de norme 1.

Il existe donc , de classe  de sorte que :

.

Ainsi, 

D’où la formule : 

En pratique : 

* + 1. Récapitulation des méthodes

1ère méthode :

, , donc 

 (avec , )

Et 

Or,  d’une part,

Et d’autre part , soit 

D’où on tire  après calculs…

2ème méthode :

, , 

, .

Donc 

D’où .

3ème méthode :

 où  est une mesure de l’angle orienté , ou aussi de .

Exemple :

Parabole 

,, .

Donc , et .

Donc .

Complément hors programme : à propos du cercle osculateur

Soit un arc birégulier de classe . Soit  un point de l’arc, origine des abscisses curvilignes. Le repère de Frenet en  est noté .

Développement limité de  à l’ordre 3 en 0 :



Où , et .

Composantes de  dans  :



Un cercle de centre  (dans ) passant par  a pour équation



Définition : Puissance d’un point *M* du plan par rapport à ce cercle 

Ici, 

Pour que  soit infiniment petit d’ordre le plus élevé possible, on prend  (ainsi, ), ce qui revient à prendre  sur la normale à l’arc en  ; et on peut prendre aussi  (ainsi, ), ce qui revient alors à prendre le cercle osculateur. Ainsi, pour ce choix, 

Ainsi, le cercle osculateur traverse en général la courbe (car  change de signe), et c’est bien celui qui est « le mieux » tangent à la courbe.