**SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES**

## I. Généralités

### 1. Notion de suite

##### Définitions

#### Une suite *u* est une fonction définie sur qui à tout entier naturel *n* associe un réel *u*(*n*) noté .

#### Le réel est appelé terme d’indice (ou de rang) *n* de la suite *u*.

##### Notation

La suite *u* est aussi notée ou plus simplement .

##### Exemple

*u* est la suite définie sur par =. Son terme d'e rang 10 est ==.

##### Remarque

Il peut arriver qu’une suite *u* ne soit définie qu’à partir d’un certain entier naturel *p*. On la note alors .

##### Exemple

La suite *u* de terme générale est définie pour *n*Ã2. On note .

### 2. Suite définie par une formule explicite

##### Définition

#### Une suite est définie par une formule explicite lorsque son terme général est exprimé en fonction de *n* indépendamment des termes précédents.

#### On peut alors calculer n’importe quel terme de la suite directement à partir de son indice.

##### Exemple

*u* est la suite définie sur par = n×(n-1)×(n-2)×…×2×1. Alors =5×4×3×2×1=120.

##### Remarque

Si *f* est une fonction définie sur alors la suite *u* définie sur par =*f*(*n*) est une suite définie par une formule explicite.

##### Exemple

*u* est la suite définie sur par =2*n*−1.

Alors =*f*(*n*) où *f* est la fonction définie sur par *f*(*x*)=2*x*−1.

=2×100−1=199.

### 3. Suite définie par une relation de récurrence

##### Définition

#### Une suite est définie par une relation de récurrence lorsqu’elle est donnée par son premier terme et une relation exprimant en fonction de .

Pour calculer un terme, on est alors obligé de calculer tous ceux qui le précèdent.

##### Exemple

*u* est la suite définie par =2 et pour tout *n*Ã0, =+1.

Pour calculer , il faut alors calculer et  : =+1=5 ; =+1=11 donc =+1=23.

### 4. Représenter graphiquement une suite

Pour représenter graphiquement une suite *u*, on peut :

* Placer sur un axe les points d’abscisses  ;



* Placer dans un repère du plan les points de coordonnées  ;

Dans le cas d’une suite définie par une formule explicite de la forme =*f*(*n*), on trace la courbe représentant la fonction *f* et on marque les points de d’abscisses entières positives ;



* Si *u* est une suite définie par une relation de récurrence =*f*, on trace la courbe représentant la fonction *f*.

On place sur l’axe des abscisses et on obtient =*f* comme ordonnée du point de la courbe d’abscisse .

On place sur l’axe des abscisses à l’aide de la droite D d’équation *y*=*x* et on obtient =*f* comme ordonnée du point de d’abscisse .

On place sur l’axe des abscisses à l’aide de la droite D et ainsi de suite.

0

1

 1

D

Le chemin obtenu en reliant les points , , ,… est la représentation graphique en chemin de la suite.

## II. Sens de variation d’une suite

### 1. Suite croissante, suite décroissante

##### Définitions

#### Soit *u* une suite.

#### On dit que *u* est croissante lorsque pour tout entier naturel *n*, Â.

#### On dit que *u* est décroissante lorsque pour tout entier naturel *n*, Â.

##### Exemple

Soit *u* la suite définie sur par =2*n*+1.

Pour tout entier naturel *n*, =2(*n*+1)+1=2*n*+3 =+2 donc Â : la suite *u* est croissante.

##### Remarque

Lorsque pour tout entier *n*, =, on dit que la suite *u* est constante.

### 2. Méthodes pour étudier le sens de variation d’une suite

Pour étudier le sens de variation d’une suite *u*, on peut procéder de l’une des façons suivantes.

#### Méthode 1 : on étudie le signe de la différence −.

* Si pour tout entier naturel *n*, −Ã0 alors la suite *u* est croissante ;
* Si pour tout entier naturel *n*, −Â0 alors la suite *u* est décroissante.

Exemple

Soit *u* la suite définie sur par =*n*²−*n*−2.

Pour tout entier naturel *n*, −=(*n*+1)²−(*n*+1)−2−(*n*²−*n*−2)=2*n*Ã0 donc *u* est croissante.

#### Méthode 2 : si =*f*(*n*), on utilise le sens de variation de la fonction *f*.

* Si *f* est croissante sur alors la suite *u* est croissante ;
* Si *f* est décroissante sur alors la suite *u* est décroissante.

Exemple

Soit *v* la suite définie sur par =-3*n*+5.

Pour tout *n*, =*f*(*n*) où *f* est la fonction définie sur par *f*(*x*)=-3*x*+5.

*f* est décroissante sur donc la suite *u* est décroissante.

#### Méthode 3 : si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on compare à 1.

* Si Ã1 alors la suite *u* est croissante ;
* Si Â1 alors la suite *u* est décroissante.

##### Exemple

Soit *w* la suite définie sur par =.

Pour tout *n*, >0 et ==2>1 donc la suite *w* est croissante.

**I) Suites numériques**

Voir problème : Jeux de logique

 1) Définition et notation

Une suite numérique est une fonction de dans .

On note la suite (un).  u : →

 n → u(n) = un

un est le terme de rang n (ou d’indice n) de la suite (un).

 2) Détermination d’une suite

Une suite numérique peut être déterminée de différentes façons :

par son terme de rang n ;

par une relation de récurrence (relation entre deux termes consécutifs) et la donnée du premier terme.

Exemples

la suite (un) définie par un = -2n + 3 (où n∈)

la suite (vn) définie par : (où n∈)

**II) Suites arithmétiques**

Voir problème : Suites arithmétiques

 1) Définition

Soit *r* un nombre réel non nul.

Si, pour tout entier naturel n, la suite (un) vérifie un+1 = un + r, alors la suite (un) est arithmétique de raison *r*.

 2) Expression de un en fonction de n

Le terme général d’une suite arithmétique de premier terme u0 et de raison *r* est : un = u0 + nr (n∈)

Si u1 est le premier terme de la suite (un) alors : un = u1 + (n – 1)r (n∈\*)

 3) Sens de variation et représentation graphique

Soit (un) une suite arithmétique de raison r.

Si r > 0, alors la suite (un) est strictement croissante.

Si r = 0, alors la suite (un) est constante.

Si r < 0, alors la suite (un) est strictement décroissante.

**III) Suites géométriques**

Voir problème : Suites géométriques

 1) Définition

Soit q un nombre réel non nul.

Si, pour tout entier naturel n, la suite (un) vérifie un+1 = q  un, alors la suite (un) est géométrique de raison q.

 2) Expression de un en fonction de n

Le terme général d’une suite géométrique de premier terme u0 et de raison q est : un = qn u0 (n∈)

Si u1 est le premier terme de la suite (un) alors : un = qn-1 u1 (n∈\*)

 3) Sens de variation et représentation graphique

Soit (un) une suite géométrique de raison q > 0.

Si q > 1, alors la suite (un) est strictement croissante.

Si q = 1, alors la suite (un) est constante.

Si q < 1, alors la suite (un) est strictement décroissante.

**I. Suites**

 On appelle suite toute fonction de vers , qui à un nombre *n* associe son image u*n*, appelé **terme général** de la suite.

 On peut la définir (c'est-à-dire permettre de déterminer les termes u1, u2, u3 … de deux façons différentes :

🡪 A la façon d’une fonction, en donnant un moyen de calculer directement u*n* à partir de *n*.

**Exemple :** u*n* =

 u1 = 1

 u2 =

 u3 = (…)

🡪 Par **récurrence**, c'est-à-dire en donnant

**Exemple :**

 u1 = 3

 u2 = 7

 u3 = 15 (…)

**II. Suites arithmétiques**

**a. Définition**

 On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s’obtient en ajoutant un nombre constant *r* appelé **raison** de la suite.

 Elle est donc définie par récurrence par :

**Exemple :**

 u1 = -3

 u2 = 1

 u3 = 5

 u4 = 9 (…)

**b. Propriété**

 Soit (u*n*) une suite arithmétique de 1er terme u0 et de raison *r*.

 Alors pour tout *n*, on a :

**Exemple :** (u*n*) est une suite arithmétique de 1er terme u0 = -7 et de raison *r* = 4

 u1 = -7 + 1 × 4 = -3

 u2 = -7 + 2 × 4 = 1

 u3 = -7 + 3 × 4 = 5

 u4 = -7 + 4 × 4 = 9 (…)

**c. Somme des premiers termes d’une suite arithmétique**

**Propriété :**

La somme des *n + 1* premiers termes (de u*0* à u*n*) d’une suite arithmétique est :

ou

**×**

**III. Suites géométriques**

**a. Définition**

 On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s’obtient en multipliant par un nombre *q* constant appelé **raison** de la suite.

 Elle est donc définie par récurrence par

**Exemple :**

 u1 = 6

 u2 = 12

 u3 = 24

 u4 = 48 (…)

**b. Propriété**

 Soit (u*n*) une suite géométrique de 1er terme u0 et de raison *q*.

Alors pour tout *n*, on a :

**Exemple :** (u*n*) est une suite géométrique de 1er terme u0 = 3 et de raison *r* = 2

 u1 = 3 × 21 = 6

 u2 = 3 × 22 = 12

 u3 = 3 × 23 = 24

 u4 = 3 × 24 = 48 (…)

**c. Somme des premiers termes d’une suite arithmétique**

**Propriété :**

La somme des *n + 1* premiers termes (de u*0* à u*n*) d’une suite géométrique est :

ou

**×**

# Exercices suites

#### Exercice 1

On considère la suite *u* définie par =0 et =.

1. a. Calculer , , .
b. En déduire que *u* n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On considère la suite *v* définie par = pour *n*Ã0.
3. Calculer , , et .

En déduire une conjecture sur la nature de *v*.

1. Démontrer la conjecture précédente.
2. En déduire l’expression de en fonction de *n*.

Vérifier l’expression obtenue en calculant , et .

1. En déduire l’expression de en fonction de *n*.

Vérifier l’expression obtenue en calculant et .

#### Exercice 2

Soit *u* la suite définie par =-1 et pour tout entier naturel *n*, =+*n*+1.

1. a. Calculer , , et .
b. Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. On définit la suite *v* par =− pour tout entier naturel *n*.
a. Calculer les 4 premiers termes de la suite *v*.
b. Montrer que *v* est une suite arithmétique.
3. a. Calculer ++…+ en fonction de *n*.
b. Exprimer ++…+ en fonction de .
c. En déduire l’expression de en fonction de *n*.
 Vérifier l’expression obtenue en calculant , , et .

# Correction

#### Exercice 1

1. a. ===-3
 ====9
 ====4,2.
 ====
b. −=-3−0=-3 et −=9−(-3)=12 : *u* n’est pas arithmétique.
 Pour tout réel *k*, =*k*×0=0ý : *u* n’est pas géométrique.
2. a. ===3 ;
 ====;
 ====;
 =====.
 Conjecture : *v* est une suite géométrique de raison .
b. Pour tout entier naturel *n*:
 =
 Or −3=−3==
 et −1=−1==
 Donc =×===×=.
 On en déduit que *v* est une suite géométrique de raison .
c. Pour tout entier naturel *n*, =×=3×=.
 Vérification : ==; == et ==.
3. Pour tout entier naturel *n*, = donc = :
3×=×
−3=×−3×
-3+3×=×−

3=×

Donc =.

Vérification : ===-3 et ===9.

#### Exercice 2

1. a. =-1 ; =+0+1=0 ; =+1+1=2 ; =+2+1=5
 et =+3+1=8
b. −=1 et −=2 donc la suite *u* n’est pas arithmétique.
 Pour tout réel *k*, *k*=0ý donc la suite *u* n’est pas géométrique.
2. a. =−=0−(-1)=1 ;

 =−=2−0=2 ;

 =−=5−2=3 ;

 =− or =+4=9 donc =9−5=4.
b. Pour tout entier naturel *n*:

−=−−(−)
 −=+*n*+1+1−−

−=*n*+2−(*n*+1)=1
 On en déduit que *v* est une suite arithmétique de raison 1.

1. a. *v* est une suite arithmétique de raison 1 donc pour tout entier *n*Ã1 :
 ++…+= or =+(*n*−1)×1=1+*n*−1=*n*

 donc ++…+=
b. Pour tout entier *n*Ã1 :
 ++…+=−+−+…+−+−=−.
 donc ++…+=+1.
c. On en déduit que pour tout entier *n* : =+1
 donc =-1=.

 ===0

 ===2

 ===5

 ===9