**Optimisation**

**Cours n°1 : Domaine de classification des problèmes d'optimisation**

1. La recherche opérationnelle

Historique:

Outils de calcul informatisés (milieu du 20e siècle)

* répondre à des problèmes de planification de manière rationnelle (et non de manière intuitive seulement)
* outils d'aide à la décision

Définition:

Technique de calcul de décisions optimales (optimisation) au sens d'un critère (évaluation) qui mesure l'efficacité des décisions. Autant de décision optimale que de critères possibles

* une seule politique optimale

1. Rôle de l'optimisation dans les systèmes de production

Classification hiérarchique:

Niveau 3: gestion

Niveau 2: produit

Niveau 1: machine

Niveau 0: asservissements

Optimiser le temps de réponse (seconde)

Optimiser la fiabilité de conception (heure)

Optimiser les performances du produit (mois)

Optimiser l'entreprise pour son profit (années)

1. Classification des problèmes

Univers certain ou incertain (déterministe ou aléatoire)

Si certain alors on peut modéliser le problème de décision et appliquer une théorie mathématique rigoureuse

Perturbations

Sortie s

Entrée e

Système complètement prédictible :

* univers hostile (théorie des jeux)
* processus statique ou dynamique (le temps intervient ou non)
* état continu ou état discret
  + variable de décision, nombres relationnels
* temps continu ou échantillonné

1. techniques de recherche d'optimum

* programmation mathématique :
  + base théorique de l'optimisation
    - recherche de maximum (ou minimum) d'une fonction de plusieurs variables (f(x1, x2, …))
* programmation linéaire : cas particuliers de la programmation mathématique
* théorie des graphes : modélisation particulière qui n'est du type ordinaire de la théorie des fonctions, mais très intuitives
* programmation dynamique (temps): décisions séquentielles

1. Exemple de classes de problème

* allocation de ressources - planification
* gestion de stock - théorie des jeux
* réseau - file d'attente
* ordonnancement - commande optimale

**Cours n°2 : La programmation mathématique**

1. Les étapes de formulation d'un problème d'optimisation
   1. choix des variables de décision

* en programmation mathématique, les variables de décision sont des nombres réels en nombre n

x1, x2, …, xn ou le vecteur de décision X={x1, x2, …, xn}

=> X, espace à n dimensions

Processus

X

Résultats

* 1. validité a priori des variables de décision
* c'est définir un domaine de  ou les xi

Exemple : xi 0, le domaine admissible :

On dit que les décisions sont contraintes si elles ne peuvent pas prendre toutes les valeurs de.

* 1. quantification d'une décision
* c'est la définition d'une fonction d'évaluation une fonction de n variables, F(xi, …, xn).

X=> un nombre F(X) ou bien critères de décision

* 1. optimisation
* dans l'ensemble des décisions admissibles, il y en a une (ou plusieurs) qui conduit à une valeur du critère (F) plus grande (ou plus petite) que toutes les autres.
* pour cet ensemble de décisions ={, …,} et l'optimum est =F(, …,), c'est un maximum ou minimum absolu.

Résoudre un problème d'optimisation, c'est trouver  et.

1. Les théorèmes généraux de la programmation mathématique
   1. recherche locale du maximum

* on part d'une décision quelconque admissible (décision initiale X0).
* on calcule F0=F(X0)

=> Une première valeur du critère.

=> MAIS ce n'est pas forcément l'optimum

On teste X0 en effectuant une variation de décision autour de X0, on calcule la nouvelle valeur de F1(X0+∆X).

F1= F1(X0+∆X)

* si X, F1≤F0, F0 est peut-être un maximum, on dit que c'est un maximum local
* si pour tous ∆X, F1≥F0, F0 est alors un minimum
  1. calcul de la variation ∆F=F1- F0 pour une variation ∆X petite

(autour de ∆X=0) par la formule de Taylor

F1(X0+∆X)=F(X0) + forme linéaire des dérivées partielles successives de F.

Ex : n=2 :

F1(,) =



Th: si ne sont pas toutes les deux nulles, alors la décision X0 n'est pas un extremum (ni un max ni un min).

Pourquoi : la variation ∆F va dépendre du signe de δx1 ou δx2 et donc ∆F peut être supérieur ou inférieur à zéro.

On en déduit qu'on peut calculer les extrêmes éventuels en résolvant le système de n équations (pas forcément linéaire).



Le vecteur de composanteest le vecteur gradient de la fonction F.

* 1. exemple : fonction d'une variable F(X)

max ou min pour, une équation ou une inconnue

a

b

x1

x2

x3

F1

F2

F3

x

F(x)

- F1 est le maximum absolu sur le domaine de validité

- F2 est le maximum local sur le domaine de validité

- F3 est le minimum absolu sur le domaine de validité

Domaine admissible de la décision pour a<x<b.

- F1, F2, F3 vérifient par rapport à x1, x2, x3.

**Cours n°3 : Optimisation avec contrainte**

1. Notion de contrainte
   1. contrainte inégalité ou domaine de validité
      * les variables de décision appartiennent à un sous-ensemble de R.
      * mathématiquement : inéquations entre les variables de décision

g(x1,...,xn)>, < ou =0

Exemple : variables de décisions x1>0

-> il peut y avoir plusieurs contraintes gi(x1,...,xn)>, < ou =0, i variant de un à un nombre (nombre quelconque entier)

* 1. contrainte égalité
     + les variables de décision sont liées par une équation g(x1,...,xn)=0 et ne sont pas indépendantes

Combien de contraintes égalité?



Système de m équations à n inconnues

Si m=n résolution du système d'équations

 une ou quelques solutions possibles décisions admissibles

Dans le cas où m=n : on choisit la solution qui amène le plus grand (petit) F.

Si m>n plus de contraintes que de variables de décision

0 solution admissible

Si m<n : les solutions appartiennent à un espace de dimension n-m

Il n'y a que n-m variables de décisions indépendantes

1. Interprétation géométrique du problème d'optimisation
   1. une seule variable de décision x

évaluation de F(x), fonction ordinaire

Optimum : = maximum

x1

x2

* 1. deux variables de décision x1, x2 ()

Nombre F(M) ou F(x1, x2) = courbe de niveau des cartes géographiques

point de décision

x1

x2

F(M)=2

F(M)=3

F(M)=1

toutes les décisions possibles s'identifient aux points du plan

On va tracer dans le plan x1, x2, les courbes F (x1, x2)=constante.

Exemple : F(x1, x2)=3

Il y a une infinité de décisions qui ont la même évaluation.

les courbes s'appellent des ISO-F.

familles des courbes ISO-F

L'allure de la famille des ISO-F nous renseigne sur l'existence ou non d'une solution optimale.

Dans l'exemple, les courbes s'emboîtent et viennent se réduire à un point.

x3

x2

x1

M

* 1. trois variables de décision x1, x2, x3

Espace en trois dimensions

M=point de décision

* plus d'interprétation simple sauf de graduer l'espace
* par contre, on peut encore visualiser les fonctions de contraintes

g(x1, x2, x3)>, < ou =0, qui sont des surfaces dans , par exemple, un plan ax1+bx2+cx3+d=0

1. Recherche optimum dans le cas de contraintes égalité

Th (Lagrangien) :

L (x1, …, xn, …, λ1, …, λm)=F(x1, …, xn)+ λ1g1(x1,...,xn)+…+ λmgm(x1,...,xn)

Un point stationnaire est solution du système d'équations





L'optimum, le point stationnaire éventuel, ne correspond pas à Grad. F=0.

L'optimum avec contraintes égalité est différent de l'optimum sans contraintes.

Interprétation géométrique d'un :

x2

x1

- g(x1, x2)=0, courbe de contraintes égalité

- le point de décision doit appartenir à la courbe de contraintes

- l'optimum est le point où une courbe ISO-F est tangente à la courbe de contraintes

**Court n°4 : Programmation Linéaire**

1. Forme de la fonction d'évaluation

Hypothèse de la P.L. : la fonction d'évaluation est une combinaison linéaire de variables de décision : F(x1, x2, …, xn)= a1x1+a2x2+…+ anxn

Conséquence : Grad. 

mais les ai ne sont pas tous nuls

Donc l'optimum est situé sur les frontières du domaine d'admissibilité.

Le problème de P.L. n'a pas de sens s'il n'y a pas de contraintes.

1. Les contraintes

En P.L., il y a m contraintes inégalités qui sont de la forme h(x1, …, xn)≤0 où h est une forme linéaire b1x1+b2x2+…+bmxm ≤B

Conséquence : les frontières du domaine d'admissibilité sont constituées de m hyperplans d'équation bi1x1+bi2x2+…+bimxm=Bi

On définit un polyèdre, qui est le polyèdre des contraintes.

Exemple : n=2 F= a1x1+a2x2 3 contraintes

Contraintes : - b11v1+b12v2≤b1

- b21v2+b22v2≤b2

- b31v1+b32v2≤b3

Polyèdre des contraintes (triangle)

1. Analyse de l'existence de l'optimum

Les hyperplans ISO-F, soit d'équation : a1x1+a2x2+…+ anxn=Fα constant, c'est l'ensemble des points (x1, x2, …, xn) qui vérifient l'équation a1x1+a2x2+…+ anxn=Fα

C'est une famille d'hyperplans parallèles.

Donc, il va y avoir un hyperplan de la famille qui va "toucher" le polyèdre des contraintes en un point.

Point de contact

Frouge

En laissant tout le polyèdre d'un même côté.

au maximum

non

au minimum

La recherche de l'optimum se réduit à trouver les coordonnées des sommets du polyèdre, en résolvant le système d'équations linéaires deux à deux.

S1=D2∩ D3 D1 S1=D1∩ D2

D2

S3=D1∩ D3

D3

**Court n°5 : Algorithme du simplexe**

1. Propriétés fondamentales

L'optimum étant sur un sommet du polyèdre, il faut calculer les coordonnées des sommets admissibles.

La difficulté, c'est l'explosion combinatoire du nombre de sommets possibles :

=

Exemple : n=6 et m=10 =8008 sommets =8008 systèmes linéaires

1. Forme canonique d'un problème de P.L.

Maximum de F=C1x1+…+ Cmxm=CX avec C=et sous n+m contraintes inégalités.

n contraintes de positivité

m contraintes ordinaires

Ou minimum de F sous contrainte : - Ax≥B

- X≥0

1. Variables d'écart

Une contrainte inégalité a1x1+…+ anxn≤b, se transforme en une égalité a1x1+…+ anxn+e=b avec e≥0, e variable d'écart associée à la contrainte.

1. Forme standard

, n+m variables

Forme canonique  système d'équations avec n+m variables



-  avec :

,,

1. Transformation linéaire équivalente

On obtient une forme standard équivalente en transformant les différentes équations par des combinaisons linéaires des m+1 équations entre elles.

Exemple : - 6x1+5x2+6x3+e1=30

- 8x1+6x2+3x3+e2=24

- F= x1+ x2+ x3

-10x1-7x2+e1-2e2=-18

8 x1+6 x2+3x3+ e2=24

6F-0 x1+ x2+0 x3- e1+0F=6F-30



1. Principe de recherche de l'optimum
   1. initialisation

On prend pour première solution admissible x1=0, xn=0, n+m inconnues pour m équations.

n inconnues de trop, qu'on peut fixer à n'importe quelle valeur et trouver les valeurs des m restantes.

On fait le choix le plus simple x1=0, xn=0 : il reste à trouver e1, …, em.

Exemple : - 6x1+5x2+6x3+e1=30

- 8x1+6x2+3x3+e2=24

- F= x1+x2+x3

x1=x2=x3=0 - e1=30

- e2=24

F=0

les x1, x2 et x3 sont les variables hors base, celles que l'on met à zéro.

les e1, e2 sont les variables de base.

* 1. amélioration de la solution initiale

autre choix de variables nulles :



1. Conclusion

Il reste à déterminer les critères de choix d'un ensemble admissible de variable hors base (=0).

Il faut trouver un critère qui indique si la solution est optimum ou pas.

Initialisation

choix d'une nouvelle solution

optimum

fin

**Cours n°6 : Algorithme du simplexe, méthode du tableau**

1. Représentation de la forme standard par un tableau

Exemple : - 6x1+5x2+6x3+e1=30

- 8x1+6x2+3x3+e2=24

- F= x1+x2+x3

- n=3 et m=2

x1 x2 x3 e1 e2 b ratios

L1 6 5 6 1 0 30 

L2 8 6 3 0 1 24 

L3 1 1 1 0 0 F

Pivot

interprétation du tableau d'une ligne Li, on revient à l'équation

 classes

1. Première solution évidente

On fait x1=x2=x3=0



Choix du pivot : intersection d'une colonne q et d'une ligne p

1. Nouveau tableau équivalent
   1. choix de la colonne q

règle n°1 : on choisit la colonne dont l'élément de la ligne Cq (L3) est positif.

ici q=2 (au hasard dans ce cas, vu que les trois coefficients sont positifs)

* 1. Choix de la ligne p

règle des ratios : on forme les m ratios 

on choisit la ligne p correspondant au plus petit ratio positif

on en déduit l'élément pivot (situé en {2,2} dans l'exemple)

* 1. pivotage

vers un nouveau tableau

On transforme chaque ligne par combinaison linéaire avec la ligne du pivot (ici, c'est la ligne 2, L2) de manière à n'obtenir que des 0 pour la colonne q.

la ligne 1 devient : 

la ligne 2 du pivot devient :

L3=L3-L2

x1 x2 x3 e1 e2 b ratios

L1  0  1  10 

L2  1  0  4 

L3  0  0  F-4

On dit que la variable x2 est rentrée dans la base et la variable e2 est sortie de la base.

Solution à la deuxième itération :

* x1=0
* x2=4
* x3=0
* e1=10
* e2=0



1. Test d'optimalité

Si les coefficients c correspondant aux variables hors base sont tous négatifs, alors le F obtenu est le maximumc'est le pivot

x1 x2 x3 e1 e2 b ratios

L1 … … … … … … …

L2 … … … … … … …

L3  0 0   F-

tous les c correspondants aux variables hors base sont négatifs.

**Cours n°7 : Complément de l'algorithme du simplexe**

1. Analyse du tableau final

Test de l'optimalité sur la dernière ligne du tableau

x1 x2 … xn e1 em F

c1 c2 … cn cn+1 cn+m F-nombre qui représente la

valeur optimale de F.

c1x1+ c2x2+ …+cnxn+ cn+1e1+ …+cn+mem= F-

* 1. Il y a n valeurs nulles parmi les Ci et m valeurs restantes (en général, ≠0)

cpour l'indice k correspondant aux variables hors base.

* 1. Il y a n variables xk dont les valeurs sont les coefficients e(m).

F-=0  Foptimal=

F=c1x1+ c2x2+ …+cnxn+ cn+1e1+ …+cn+mem+

Tests d'arrêt : variation des variables xi et ej autour des valeurs

Optimales

:

Variations admissibles : lorsque xi=0 ou ej=0, 

Les autres variables ne sont pas nulles mais elles sont positives ou =0.

Si les ci non nuls sont négatifs alors <0 avec toute variation admissible.

Conséquence : si on cherche un minimumle test devient :

les ci doivent être positifs (>0)

1. Variables duales

Optimum de F=cTx avec AX≤B et X≥0.

La variation de la valeur optimale,  lorsque B varie

, on montre que :Δ=y1 Δb1+…+ ym Δbm

Les m yi sont appelés les variables de sensibilité par rapport à B.

Par définition, elles sont les variables duales.

1. Problème dual

Var X : au pb primal : Max. de F=cx et AX≤B, on associe un nouveau pb, le pb dual

Var Y : au pb dual : Min. de G=BY avec ATY≥C

Propriété : A l'optimum =.

D'autre part, les sont les variables duales du problème primal.

La dimension de Y est m (le nombre de contraintes inégalités).

1. Application numérique



x1 x2 x3 e1 e2 b

L1  5 1   

L2  1 0   

L3  0 0   F-

x1=0 e1=0

x2= e2=0

x3=

, Δ= Δb1+ Δb2

1. Exceptions
   1. il y a à la fois des contraintes de type ≤ et ≥.
   2. il y a aussi des contraintes =

x1+2x2≥3, x1 et x2≥0

Variable d'écart : x1+2x2-e1=3

Cela pose un problème dans le démarrage de l'algorithme car la matrice des variables ei n'est plus unité.



Solution : on introduit une variable supplémentaire dans l'équation

des contraintes : x1+x2-e1+η1=3 et on modifie la relation : F=>c1x1+…+cn+mxm+Mηn=F avec M grand.

Si : M grand : petit

M→∞ : =0

**Court n°8 : Optimisation dans les graphes**

1. Définition et représentation d'un graphe
   1. rappel : ensemble d'éléments Xi (sommets) avec une application qui à l'élément Xi fait correspondre d'autres éléments Xj (application non univoque).

On représente graphiquement par :

Xj

Xi Xk

Xl

* 1. propriétés

- arc XiXj orienté on non :

peut être valué :

- chemin : suite d'arcs adjacents : X1 X2

X3

- circuit : X1 X2

X4 X3

- arbre : graphe dans lequel il n'y a pas de circuit

1. Différents types de problèmes de R.O. s'exprimant par des graphes
   1. problème du plus court chemin

xA1

x12

xA3

x13

x3B

x2B

X1 X2 On cherche à minimiser le coût pour aller

de A en B, c'est-à-dire trouver le chemin

optimum.

A B

Départ Fin

X3

Aide à la décision où l'inconnue est le chemin :

plusieurs chemins possibles : AX1X2B, AX1X3B, en nombre fini.

Le coût = xA1+x13+x3B

* 1. problème de flot maximum

X1 X4

φA1

φ12

φA2

φ13

φ2B

φ4B

φ32

φ43

On veut écouler un flot de A en B

en maximisant φA1+φA2=φ4B+φ2B

A B

X3

X2

Contraintes : - en un sommet, Σ flot entrant = Σ flot sortant

 conservation des flux

- canalisation 0<φ<Cij

Les variables sont les Cij inconnues à priori.

1. Problème de transport
   1. Définition

On doit transporter une quantité d'un même produit entre des sources et des destinations.

 

x11

x33

On minimise la somme des coûts Cij.

Les Cij sont les coûts unitaires par nombre de produits. Coût de i à j : Cijxij.

Critère F= ΣCijxij.

6 contraintes inégalité : - x11+x21+x31=D1

- x12+x22+x32=D2

- x13+x23+x33=D3

- x11+x12+x13=S1

- x21+x22+x23=S2

- x31+x32+x33=S3

C'est un problème de P.L. avec contraintes égalité.

* 1. Recherche d'une solution admissible

Résoudre le système linéaire de 6 équations à 9 inconnues, on a une infinité de solutions.

On utilise une méthode empirique sous forme d'un tableau :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Destination  Source | 1 | 2 | 3 |
| 1 | x11 | x12 | x13 |
| 2 | x21 | x22 | x23 |
| 3 | x31 | x32 | x33 |

Exemple :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Destination  Source | 1 | 2 | 3 |  | Il est facile de trouver une première solution. |
| 1 | 100 | 0 | 0 | 100 |
| 2 | 50 | 50 | 100 | 200 |
|  | 150 | 50 | 100 |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Destination  Source | 1 | 2 | 3 | Coût de cette solution. |
| 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 1 | 4 | 6 |

* 1. test d'optimalité

On effectue des variations admissibles des xij trouvés dans la solution initiale

variation du coût F.

**Court n°9 :**

**Optimisation dans les graphes**

1. Problème du flot maximum

Exemple simple :

B

E

S

A

C1 φ1

C5 φ5

C4 φ4

C2 φ2

C3 φ3

graphe orienté : on va de E en S

Plusieurs chemins : - EABS

- EAS

- EBS

Graphe valué par les flux φi : φ1, φ2, φ3, φ4, φ5.

Contrainte de flux :

0< φi <Ci capacité de l'arc i

Capacité : C1, C2, C3, C4, C5

- contrainte de conservation du flux en chaque sommet

- en A : φ1=φ3+φ4 en B φ5=φ2+φ3

réseau de distribution d'eau

Le problème d'optimisation :

a - cinq variables de décision : φ1, φ2, φ3, φ4, φ5.

b - F=φ1+φ2=F(φ1,φ2) : évaluation

par conservation de flux : F= φ4+φ5

c - contrainte sur les φi

- 5 contraintes inégalité :

- φ1<C1

- φ2<C2

- φ3<C3

- φ4<C4

- φ5<C5

- 2 contraintes égalité :

- φ1=φ3+φ4

- φ5=φ2+φ3

Problème de P.L. sous forme non canonique. Mélange et contraintes inégalité.

* 5 nouvelles variables d'écart
* 2 nouvelles variables pour transformer les contraintes égalité en contraintes inégalité
* 2 nouvelles variables pour les transformer en contraintes égalité

5+9=14 variables

tableau à 14 colonnes et 7 lignes

en pratique, on va chercher un autre algorithme

1. Algorithme de Ford-Fulkerson
   1. recherche d'une solution initiale la plus simple possible

B

E

S

A

3 1

2 0

5 1

4 0

1 0

- φ1=1

- φ2=0

- φ3=0

- φ4=1

- φ5=0

vérifient les contraintes

* 1. première amélioration

On cherche à saturer certains arcs, ici : EA et BS

B

E

S

A

3 3

2 2

5 2

4 1

5 1

Solution complète : tous les chemins comprennent au moins un arc saturé :

* EAS : EA saturé
* EABS : EA et BS saturé
* EBS : BS saturé

Il existe un algorithme qui permet de trouver une solution complète

* 1. deuxième amélioration

Marquage : - on marque les extrémités des arcs saturés

- on marque l'origine des arcs dont l'extrémité est saturée

on trouvera un nouveau graphe complet

Test d'optimalité : on ne peut plus marquer les sommets

optimum : = φ1+φ2=φ4+φ5=5

B

E

S

A

3 3

2 2

5 3

2 2

5 0

=5

1. Analyse post-optimale
2. Problème de plus court chemin
3. problème :

graphe orienté et valué

1

5

2

4

3

5

5

2

2

3

2

3

2

3

1

1

1

1

P

S5

S2

S4

S1

S0

S3

-1

Optimum pour aller de S0 à P?

Valeur de l'arc SiSj, comme de l'énergie pour aller de Si à Sj. Il y a N chemins possibles pour aller de S0 à P. On veut minimiser le coût pour aller de S0 à P.

Inconnue : le chemin particulier parmi les N qui minimise le coût.

1. résolution (algorithme de Belman)

Résolution itérative de problèmes plus simples

On optimise le problème : - S4 à P coût1==1

- S5 à P coût1==1

- S4S5 à P coût1 =1

On peut avoir : - S4S5 à P coût=+=2+1=3 : coût optimum

Coût optimal =1, décision S4P

3

3

1

1

P

S5

S2

S4

S1

S0

S3

En S3, décision S3S4 ou S3S5.

Coût : - S3S4P=S3S4+=2+1=3

- S3S5P=S3S5+=3+1=4