Permutations

Dans ce chapitre, *n* désigne un entier naturel non nul.

* 1. Généralités

 est le groupe des permutations sur , muni de la loi .

Notations :

* Le neutre est noté  ou 
*  est noté  (attention, non commutatif)
* Le symétrique de  est noté .

Soit  :

* Soit .



La deuxième équivalence se justifie par le fait que  est bijective et *A* est finie donc  et *A* ont même cardinal.

* Soit .

On dit que  fixe *i*, ou que *i* est invariant par , ou encore que *i* est un point fixe de  lorsque .

* Le support de  est 

Proposition :

Soit , *A* le support de . Alors *A* est stable par  et on peut identifier  à une permutation sur *A* ou n’importe quelle partie *B* telle que .

En effet : soit . Montrons qu’alors , c'est-à-dire que .

Supposons que . Alors , soit , ce qui est impossible car . Donc *A* est stable par .

Ainsi,  définit une bijection de *A* dans *A*.

On peut donc considérer que  (ensemble des permutations sur *A*).

Exemple :

.

Alors , mais on peut considérer que  ou même 

* 1. Transpositions et autres cylces
     1. Transposition

Définition :

Soient , distincts.

La transposition sur *i* et *j*, notée  ou  est la permutation  définie par :



Proposition :

Soit  une transposition.

Alors le support de  est , et , c'est-à-dire que  ou que  est d’ordre 2.

* + 1. Cycles

Définition :

Soit . Un cycle de longueur *p* est une permutation  telle qu’il existe , distincts deux à deux de sorte que :



Et .

Proposition :

Si  est un cycle de longueur *p* alors le support de  est de cardinal *p* et  est d’ordre *p*. On note, s’il n’y a pas d’ambiguïté, .

Théorème (admis) :

Toute permutation s’écrit comme un produit de cycles de supports disjoints.

Proposition :

Deux permutations de supports disjoints commutent.

Démonstration :

Soit  de support *I*,  de support *J*.

On suppose que  (c'est-à-dire que les supports sont disjoints)

Montrons alors que .

Soit .

* Si , alors  (car  puisque )

Et  car , donc . Donc 

* On fait le même raisonnement si 
* Si , alors 

Donc .

* 1. Décomposition d’une permutation en transpositions, signature

Théorème :

Toute permutation  se décompose en produit de transpositions.

On dit que  est engendré par les transpositions

Démonstration :

Montrons par récurrence que «  se décompose en produit de transposition ». (on note )

* Pour , ok

Pour ,  et 

* Soit , supposons .

Soit .

Si ,  peut être vue comme un élément de .

Donc  se décompose en produit de transpositions sur .

Sinon, , où . Notons alors .

Alors , donc  s’écrit comme produit de transposition, à savoir :



Donc , ce qui achève la récurrence.

Exemple avec cette méthode :

 ;

 ; …



Donc .

Autre exemple : décomposition d’un cycle



Plus généralement :



Théorème, définition (admis) :

Il n’y a pas unicité de la décomposition d’une permutation  en produit de transposition (évident), mais la parité du nombre de transposition ne dépend que de .

Par définition, la signature de , notée  est 1 si ce nombre est pair, -1 sinon.

Proposition :

L’application  est un morphisme de  dans .

Démonstration :

Soient  décomposées respectivement en *p* et *q* transpositions.

Alors  se décompose en  transpositions.

Donc 

Le noyau de  est , qui est un sous-groupe de .

On l’appelle le groupe alterné sur *n* éléments ; on a 

En effet : . Donc 

De plus, l’application  (où  est une transposition fixée) est bijective (d’inverse elle-même), et . Donc , d’où le résultat.

Exemple important : un cycle de longueur *p* est de signature .