Produit scalaire sur un R-ev

Ici, *E* désigne un R-ev.

* 1. Définition

Définition :

Un produit scalaire sur *E*, c’est une forme bilinéaire symétrique définie–positive sur *E*,

C'est-à-dire une application  telle que :

* Pour tous , 

Et pour tous , 

(Bilinéarité)

* Pour tous ,  (symétrie)
* Pour tout ,  (« positive » seulement)

Et  (« définie–positive »)

Exemple : le produit scalaire canonique sur .

Soit . Alors  est un produit scalaire sur . On l’appelle le produit scalaire canonique sur .

Démonstration :

La bilinéarité et la symétrie sont immédiates.



* 1. Propriétés essentielles
     1. Théorème de Cauchy–Schwarz

Théorème : (inégalité de Cauchy–Schwarz)

Soit  un produit scalaire sur *E*.

Alors, pour tous , 

Démonstration :

Soient 

* Si , alors  et  sont nuls (car  est une forme bilinéaire)
* Si . Pour tout , on a :



Or,  et  est définie–positive. Donc . On a donc à droite un polynôme du second degré en  qui reste toujours positif. Son discriminant est donc négatif (ou nul).

Donc 

D’où l’inégalité voulue.

* + 1. Norme associée à un produit scalaire

Définition générale d’une norme sur un R-ev :

Une norme sur *E*, c’est une application  telle que :



Proposition :

Soit  un produit scalaire sur *E*. Alors l’application  est une norme sur *E* (ainsi, pour tout , appelé le carré scalaire de *x*)

Démonstration :

Déjà, pour , . Donc  a un sens et est positive, ne peut être nulle que si , ce qui n’est le cas que lorsque .

Pour , on a .

Soient . On a les équivalences :



Ce qui est vrai car  (Cauchy–Schwartz)

On appelle cette norme la norme associée au produit scalaire 

* + 1. Distance associée à un produit scalaire

Définition générale de distance sur un ensemble *E*:

Une distance sur *E*, c’est une application  telle que :



Proposition :

Si *N* est une norme sur le R-ev *E*, alors l’application  est une distance sur *E*, appelée la distance associée à la norme *N*.

Démonstration :

On note 

, n’est nul que si  soit .



Cas particulier : Si *N* est la norme associée à un produit scalaire , alors la distance associée à cette norme s’appelle la distance associée au produit scalaire .

* + 1. Orthogonalité

On suppose *E* muni d’un produit scalaire .

Définition :

Soient . On dit que *x* et *y* sont orthogonaux (pour le produit scalaire ) lorsque . On note alors  ( est donc un symbole – courant – pour la relation « être orthogonal à »).

Remarque :

 car .

Théorème (de Pythagore) :

Soit *N* la norme associée au produit scalaire . Alors, pour tous , on a l’équivalence : 

Démonstration :

Soient . On a :



Ainsi, .

* + 1. Divers

On suppose *E* muni d’un produit scalaire , la norme associée *N*.

Diverses égalités :





* + 1. Familles orthogonales, orthonormales

On suppose *E* muni d’un produit scalaire .

Définition :

Soit  une famille de vecteurs de *E*.

* La famille est orthogonale 



(Où  si , 0 sinon)

Note :

La famille  est libre  pour tout  fini, la famille  est libre.

 pour tout  fini, pour toute famille  de scalaires : 

Proposition :

Si  est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls (et en particulier si  est une famille orthonormale), alors  est libre.

Démonstration :

Soit , famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Soit , fini. Soit  une famille de réels. Supposons que .

Soit . Alors . Donc .

Donc . Donc  est libre. Donc  est libre.

Exemples de famille orthogonale :

* La base canonique de  est évidemment orthonormale pour le produit scalaire naturel sur .
*  muni du produit scalaire .

Alors les fonctions  forment une famille orthogonale. En effet :

Pour , on a :



(Ainsi, les famille des  est orthonormale)

* + 1. Sous-espaces orthogonaux

On suppose *E* muni d’un produit scalaire .

Définition :

Soit *F* un sous-espace vectoriel de *E*. On note  (ensemble des éléments de *E* orthogonaux à tout les éléments de *F*).

Proposition :

 est un sous-espace vectoriel de *E*, appelé l’orthogonal de *F*.

Démonstration :

 car 

* Soient .

Alors  car .

(Remarque : on n’utilise pas le fait que *F* est un espace vectoriel pour montrer que  en est un, donc *F* peut très bien être un ensemble quelconque…)

Définition – proposition :

Soient *F*, *G* deux sous-espaces vectoriels de *E*.

*F* et *G* sont orthogonaux 

On note alors .

Exemple (, produit scalaire naturel) :



Remarque :

 car 

. En effet :

Soit . Alors . En particulier, . Donc .

D’où , et l’autre inclusion est évidente…



« Les éléments de *F* sont orthogonaux à tous les éléments de *E* qui sont orthogonaux à tous les éléments de *F* ».

Ou encore :

Soit , montrons que , c'est-à-dire que , ce qui est vrai car , donc pour tout  (par définition de )

L’autre inclusion est fausse en général (en fait, elle est vraie uniquement en dimension finie, comme on le verra dans le chapitre suivant)