Propriétés métriques des arcs plans et gauches

Notations, conventions, rappels

 désigne ici un espace affine euclidien (de dimension 2 ou 3), éventuellement orienté.

Rappel :

Un arc paramétré est dit simple, régulier ou birégulier lorsque tout point de l’arc l’est.

Par abus de langage, on appelle arc paramétré de classe  simple, régulier, ou plus simplement courbe de  toute partie  de  qui est le support d’au moins un arc paramétré régulier de classe  simple, régulier ()

* + 1. Paramétrages admissibles des arcs et arcs orientés

On appelle paramétrage admissible de  toute application , où *I* est un intervalle de R, telle que  est de classe , injective (on dit aussi simple), d’image  (on dit que  est le support de ) et  ne d’annule pas (on dit aussi que  est régulier)

On rappelle que les autres paramétrages admissibles de  sont les  où  est un –difféomorphisme.

Lorsque, de plus,  est un arc orienté, on considèrera uniquement des paramétrages admissibles croissantes, c'est-à-dire conservant l’orientation.

* + 1. Etude locale d’un arc plan

Lorsque  admet en  au moins deux dérivées d’ordre *r* et  non colinéaires, on sait décrire l’allure de l’arc au voisinage de  (allure ordinaire, rebroussements, inflexion).

NB : tous les arcs considérés sont, sauf exception signalée, de classe  (), simples, réguliers voire birégulier si nécessaire, orientés et contiennent au moins deux points (et donc une infinité)

* 1. Abscisse curviligne, longueur, vecteur unitaire tangent
     1. Mesure algébrique d’un sous–arc

Soit  un arc orienté et  un paramétrage admissible.

Pour , on appelle longueur du sous–arc  de  le nombre réel  où *a* est le paramètre de *A*, *b* celui de *B*.

Remarque :

Un changement de variable dans l’intégrale montre que  est indépendant du choix du paramétrage admissible direct  choisi

* + 1. Paramétrage normal et abscisse curviligne

On appelle paramétrage normal d’un arc  un paramétrage admissible  tel que .

Propriétés :

Soit  un paramétrage normal.

Alors 

Et pour ,  est birégulier si et seulement si  ne s’annule pas.

En effet :

Pour la première propriété, il suffit de dériver , constante égale à 1.

La deuxième découle ensuite de la première.

Exemple :

 est un paramétrage normal du cercle de centre *O* et de rayon .

Théorème :

Soit  un paramétrage admissible de l’arc , , simple, régulier, orienté et . On considère l’application . Alors :

*  est injective et a pour image un intervalle  de R.
* La réciproque  de *s* est un paramétrage admissible direct et normal de .
* Inversement, si  est un paramétrage admissible direct et normal de , il existe  tel que 

Corollaire :

Un arc admet un paramétrage normal si et seulement si il est régulier.

Démonstration :

Soient , supposons que 

Il existe  tels que , .

Ainsi, , .

Donc , c'est-à-dire 

Comme  est un paramètre admissible de l’arc régulier, on a 

Donc , c'est-à-dire .

On a, pour tout , .

Alors *h* est définie et dérivable sur *I*, et 

Donc *h* est un –difféomorphisme de *I* dans son image, qui est  (car ). Donc *h* est inversible, et on a , c'est-à-dire .

Donc  est un paramétrage admissible direct de  (car  est un –difféomorphisme croissant et  est un paramétrage admissible direct de )

De plus, ,

donc 

Donc  est même un paramétrage normal de .

Soit maintenant  un paramétrage admissible direct normal de .

On note  tel que .

Soit  ; en notant , il existe , tel que .

Alors 

Donc comme les deux paramétrages sont normaux, on a 

Donc , c'est-à-dire 

Comme c’est valable pour tout , on a bien en posant , .

* + 1. Vecteur unitaire tangent

Si  est un paramétrage admissible de , on appelle vecteur unitaire tangent en  de paramètre *a* le vecteur . Si  est un paramétrage normal, on a ainsi .

Théorème :

Le vecteur unitaire tangent ne dépend pas du paramétrage admissible *direct* choisi.

Si  est paramétré par une abscisse curviligne  et si , on a 

* + 1. Cas d’un arc non orienté régulier et simple

Un tel arc peut être muni de deux orientations. Les mesures algébriques, abscisses curvilignes, vecteurs unitaires tangents obtenus pour ces deux orientations seront deux à deux opposés.

On appelle longueur d’un sous–arc  de  le réel positif 

* 1. Repère de Frenet, courbure d’un arc orienté

Sauf dans le paragraphe relatif aux arcs gauches, les arcs ici sont tous plans.

* + 1. Repère de Frenet

Soit  un arc orienté , simple, régulier, du plan orienté . En tout point , on définit le repère orthonormé direct mobile de Frenet  où  est le vecteur unitaire tangent et  le vecteur directement orthogonal à , c'est-à-dire que si  est la rotation vectorielle d’angle  de  et  un vecteur unitaire directement orthogonal à , on a .

* + 1. Si  : courbure, formule de Frenet

Théorème :

Soit  un paramétrage normal  () de .

Alors il existe une application  de classe  telle que

 et 

 est birégulier sur  si et seulement si 

Définition :

 est la courbure algébrique en . En un point birégulier  est le rayon de courbure algébrique.

Propriété :

On a 

* + 1. Arcs gauches : droites et plans remarquables en dimension 3

On suppose ici que  est un espace euclidien orienté de dimension 3 ou plus et on considère un arc .

Outre la tangente, on considèrera le plan normal (perpendiculaire à la tangente au point ). En un point birégulier, on définit le plan osculateur : c’est le plan passant par  dirigé par le système libre  : il contient la tangente.

On considère aussi parfois la droite du plan osculateur passant par *M* et perpendiculaire à la tangente : on l’appelle normale principale ; la perpendiculaire en *M* au plan osculateur s’appelle binormale.

* 1. Rectification : exemples de calcul et formules usuelles

Soit  un arc  (), régulier, simple, orienté.

On utilise la notation différentielle : si  est un paramétrage admissible, par exemple au point ,  désigne la valeur de la différentielle  en .

* + 1. Utilisation de la formule locale

Théorème :

Si  est un arc birégulier tangent en  à , le rayon de courbure en *O* est .

Remarque :

S’il s’agit d’étudier la courbure en un seul point, on peut se ramener à ce cas par changement de repère orthonormal.

Démonstration : admis

* + 1. Choix du paramètre

*t* désigne un paramètre quelconque, *s* un paramètre normal (une abscisse curviligne). Plus généralement, si  est un difféomorphisme, on peut considérer le paramétrage admissible .

On va examiner le cas des paramètres usuels :

Exemples :

1. En coordonnées cartésiennes, l’abscisse *x* est un paramètre admissible si et seulement si  ne s’annule pas, c'est-à-dire si et seulement si  n’a aucune tangente parallèle à . On a un énoncé analogue pour *y*.
2. (Un relèvement de) l’angle polaire  est un paramètre admissible si et seulement si aucune tangente à  ne passe par *O*. En effet, si  ne passe pas par *O*, le théorème de relèvement permet d’écrire  (où ,  sont de classe  et ), d’où . On voit donc que  ne s’annule pas si et seulement si  n’est pas colinéaire à .
3. (Un relèvement de) l’angle  est un paramètre admissible si et seulement si  est birégulier. On a en effet .

(Puisque  et donc en dérivant,

)

* + 1. Paramétrage normal d’un arc plan

Dans ce cas, on a :

, , 

où , invariant par changement de base orthonormée directe. (et changé en l’opposé pour un changement indirect)

* + 1. Paramétrage quelconque des coordonnées cartésiennes en dimension 2 ou 3 (ou plus) dans un repère orthonormal  : cinématique.

 désigne ici l’arc 

On pose  (vitesse algébrique). On a alors :

 et  ou 

En dimension 2, on a ainsi :

, 

D’où  et .

* + 1. Coordonnées cartésiennes dans un plan euclidien orienté

Ici, le repère  est supposé orthonormé direct. On note  un relèvement de classe  de l’angle . On a alors :



Et donc , , 

On a aussi 

Attention : la connaissance de  ne détermine  que modulo , ce qui est insuffisant quand l’orientation intervient. (On ne peut par exemple déterminer  et  qu’au signe près)

* + 1. Coordonnées polaires (ou cylindriques)
* En dimension 2 ou 3 :

On prend comme paramètre (un relèvement de) l’angle polaire  (ou  en cylindriques...).

On pose  et 

On a alors , ,

 et 

* En dimension 2, on a aussi :

, , 

Soit 

* + 1. Coordonnées polaires

On note *V* un relèvement de l’angle orienté .

On a , 

Donc , , .