R-ev euclidien orienté de dimension 2

Dans tout ce chapitre, *E* désigne un R-ev euclidien orienté de dimension 2.

Exemples :

 muni de sa structure euclidienne canonique.

C, en tant que R-ev de dimension 2, on peut le munir de sa structure euclidienne orientée naturelle, c'est-à-dire celle pour laquelle la base naturelle  est une base orthonormée directe.

Alors, pour , , on a , 

* 1. Rappels : droites du plan *E*.

Ce sont les hyperplans de *E*:

Si  est une base de *E*, une droite a pour équation  dans B.

Le vecteur  de composantes  dans B dirige *D* (), et  de composantes  dans B est normal à *D*. ()

Pour , on note  le projeté orthogonal de  sur *D*.



Alors , 

Donc si la droite a pour équation  dans une base orthonormée directe B, si  dans B, alors 

* 1. Angle orienté de deux vecteurs non nuls du plan

Proposition, définition :

Soient  deux vecteurs non nuls de *E*.

Alors il existe un réel , unique à  près, tel que :

, où  désigne le vecteur de *E* tel que  soit une base orthonormée directe de *E*.

On dit alors que  est une mesure de l’angle orienté . On note .

Remarque :

L’angle orienté l’ensemble de ses mesures 

Cette définition est rarement utilisée : on devrait écrire .

Démonstration de la proposition :

 est de norme 1. Il existe donc un unique  tel que  soit une base orthonormée directe.



 est de norme 1 ; soit  la colonne de ses composantes dans .

Alors 

Et, pour tout , 

Propriétés :



 (car )



En effet :

On prend , base orthonormée directe. Alors :



Soit : 

Ainsi, cette formule montre que :

 aire du parallélogramme correspondant aux deux vecteurs.



* 1. Etude de *O*(*E*) et *O*2.
     1. Etude

Soit  : , avec 



Donc , et . Donc 

Donc , et une matrice de ce type est bien dans  ()

Ou , et une matrice de ce type est bien dans  ()

(Avec dans les deux cas )

Conclusion :

Les éléments de  sont les , avec  et .

Les éléments de  sont les , avec  et .

* + 1. Etude de *SO*(*E*) et *SO*2.

Les éléments de  sont exactement les matrices du type ,  (résulte de l’étude précédente).

On a, pour tout  :

.

Ainsi :

 est l’ensemble des ,  et  est un groupe commutatif.

Théorème et définition :

Soit . Alors il existe un réel , unique à  près, tel que la matrice de *f* dans toute base orthonormée directe soit . On dit alors que *f* est la rotation (vectorielle) d’angle .

Démonstration :

Soit B une base orthonormée directe, soit .

Comme , on sait qu’alors . Il existe donc , unique à  près, tel que . Soit B’ une autre base orthonormée directe. Soit alors *P* la matrice de passage de B à B’. Alors, comme  (et  est commutatif) : .

Pour , notons  la rotation d’angle .

Proposition :

L’application  est un morphisme surjectif du groupe  vers , et dont le noyau est 

En effet :



 (résulte du calcul matriciel précédent).

* Surjectivité : résulte du théorème précédent
* Noyau : 

Autres résultats :



* Etant donnés deux vecteurs  non nuls et , on a l’équivalence :



En effet :

* Si , alors  car  est un automorphisme orthogonal.

Notons  le vecteur tel que  soit une base orthonormée directe.

Alors la matrice de  dans cette base est .

Ainsi, .

Donc . Donc 

* Inversement, si  et , alors :

, où  est tel que  soit une base orthonormée directe. Donc  (1ère colonne de la matrice de  dans , orthonormée)

Donc , soit .

* + 1. Etude de *O*(*E*)\*SO*(*E*) et *O*2\*SO*2.
* Soit , , où B est une base orthonormale de *E*.

Alors .

Donc , où .

On remarque déjà que .

Or, , donc . Donc , donc . Ainsi, *f* est une symétrie vectorielle.

Mais , donc *f* est une symétrie orthogonale (car ), et cette symétrie est par rapport à une droite :

La symétrie par rapport à *E* est l’identité, et celle par rapport à  est , et ces deux éléments sont dans  (en dimension 2).

Ainsi, *f* est une réflexion.

* Inversement, les réflexions sont bien des éléments de .

Conclusion :  est l’ensemble des réflexions.

Attention : la matrice d’une réflexion dans une base orthonormée directe dépend de cette base.

La matrice d’une réflexion de droite *D* est  dans une base orthonormale dont le premier vecteur dirige *D*.

* + 1. Résumé, tableau : classification des éléments de *O*(*E*) lorsque dim *E* = 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dimension de l’espace des invariants | Nature | Matrice |
| 0 | Rotation d’angle  non nul (modulo ) | dans toute base orthonormée directe |
| 2 | (rotation d’angle nul) | dans toute base |
| 1 | Réflexion de droite *D* | dans une base orthonormée directe.  Du type  dans toute base orthonormée directe. |

Remarque :

La matrice de  dans une base orthonormée indirecte est  (les bases orthonormées indirectes d’une orientation sont les bases orthonormées directes de l’autre orientation)

* + 1. Composées de réflexions

Théorème :

Tout élément de  est composé de deux réflexions, l’une pouvant être choisie quelconque.

Démonstration :

Soit , 

Alors , et .

Donc . Donc  est une réflexion .

Donc 

De même, , où . Donc 

Conclusion : Les réflexions engendrent 

* 1. Compléments à propos d’angles orientés
* Relation de Chasles : 



Démonstration :

Conséquence du fait que .

* Angle orienté de deux droites du plan.



Soient *D*, *D*’ deux droites de vecteurs directeurs . Alors , modulo , ne dépend pas du choix de  et . On le note alors 

(Si  et )

*  angle orienté  :



Alors, en notant ,  les réflexions de droites , on a .