R-ev euclidien orienté de dimension 3

* 1. Préliminaires

*E* est un R-ev euclidien orienté de dimension 3.

* + 1. Brefs rappels
* Les formes linéaires sur *E* sont exactement les 
* Les plans sont les hyperplans de *E*, admettent une équation du type , avec , dans toute base.

Si B est une base orthonormale, et si  dans B, alors  (signifie :  de colonne de composantes  dans B) est normal à *P*.

Si  est un vecteur de *E*, de composantes  dans B, et *p* le projecteur orthogonal sur *P*:

, et  ; 

* + 1. Orientation induite

Soit *P* un plan de *E*,  un vecteur normal à *P* (non nul) :



Lemme :

Soient ,  deux bases de *P*.

Alors .

( et  sont bien des bases de *E*)

En effet, si la matrice de  dans  est , alors la matrice de  dans  est .

Il en résulte qu’on peut définir une orientation sur *P* de sorte que, étant donnée une base  de *P*:

 est une base directe de *P*  est une base directe de *E*.

Cette orientation s’appelle l’orientation induite sur *P* par .

* + 1. Angle non orienté

L’angle non orienté de deux vecteurs  non nuls, c’est l’unique  tel que  (définition valable en toute dimension)

Remarque :

Si *P* est un plan orienté contenant , et si  est l’angle orienté  dans le plan, alors , puisque 

* 1. Produit vectoriel
     1. Proposition, définition

Soient .

Alors il existe un et un seul vecteur  tel que .

Ce vecteur  est noté , et s’appelle le produit vectoriel de  et .

Ainsi,  est caractérisé par 

En effet :

 est une forme linéaire (car det est une application 3-linéaire)

Il existe donc un unique  tel que cette forme linéaire soit .

* + 1. Composantes en base orthonormée directe

Soit  une base orthonormée directe de *E*.

Soient . Recherche des composantes de  :

Soit 

Alors ,

Où 

Ainsi : 

Donc 

Ainsi, 

* + 1. Propriétés diverses
* Si  est une base orthonormale de *E*, alors .

En effet :

Il suffit de reprendre la formule précédente avec  et 

* Si  sont orthogonaux et de norme 1, alors  est le vecteur tel que la base  soit orthonormée directe.
* L’application :  est 2-linéaire alternée :
* linéarité par rapport à la première variable :

Soit . On a :

, et :



* Linéarité par rapport à la deuxième variable : idem
* Alternée :

Pour tout , .

Donc .

* Plus précisément, on a l’équivalence :

 est libre 

En effet :

Si  est liée, alors  car alors .

Si  est libre, on peut la compléter en une base  de *E*.

Alors , donc 

*  et 

En effet :



* Si  sont indépendants, alors  forme une base directe de *E* (non nécessairement orthonormée)

En effet :

, car 

* + 1. Produit vectoriel, angles

Soient . Soit *P* un plan contenant  ( lorsque les deux vecteurs sont indépendants). Soit  un vecteur unitaire sur .

On oriente *P* avec l’orientation induite par .

Soit  l’angle orienté  dans *P*.

Ainsi, , où  est tel que soit une base orthonormée directe de *P*, c'est-à-dire que  est une base orthonormée directe de *E*. (Remarque : )

En faisant le produit vectoriel par , on obtient :



Donc, par linéarité du produit vectoriel :



Ainsi :

, où  est l’angle non orienté entre  et .

Donc, si  :  ( est le vecteur unitaire sur  tel que  est une base directe).

* 1. Etude de *O*(*E*) et *O*3.
     1. Deux lemmes

Lemme 1 :

Soit .

Alors l’application  est polynomiale de degré 3 :

Si  où B est une base quelconque :



(Rappel : c’est le polynôme caractéristique de *f*).

Ce polynôme possède donc au moins une racine réelle  (puisque la fonction tend vers  en  et vers  en , et elle est continue)

Alors . Donc  n’est pas injective.

Donc .

Il existe donc  tel que .

Mais . Donc .

Donc 

Conclusion :

L’un au moins des deux espaces  ou  n’est pas réduit à . ( est appelé l’espace des vecteurs invariants,  celui des vecteurs retournés)

Lemme 2 :

Soit . Si *F* est un sous-espace vectoriel de *E* stable par *f*, alors  est aussi stable par *f*.

Démonstration :

Soit *F* stable par *f*, c'est-à-dire  (ou )

Comme *f* est un automorphisme, on a en fait , car  est de même dimension (finie) que *F*.

Soit . Soit . Alors , où .

Donc  (car  et  donc )

Ainsi, . Donc . D’où la stabilité.

* + 1. Classification des éléments de *O*(*E*) selon la dimension de l’espace des invariants

Soit , .

1er cas : . Alors . (inversement, )

2ème cas : . Alors la droite  est stable par *f*.  constitue donc une isométrie de *D*, et sans vecteur invariant autre que  (puisque l’ensemble des vecteurs invariants est *F*, et ). Donc  (les seules isométries d’un espace de dimension 1 sont  et ). Comme seul  est invariant, . Inversement, les réflexions sont bien dans  (et même ).



3ème cas : .

Soit  ; *P* est stable par *f*, et  constitue une isométrie vectorielle de *P*, sans vecteur invariant autre que  (même raison que précédemment).  est donc une rotation d’angle non nul)

Si on se donne un vecteur unitaire  sur *F*, et  (dans *P*) tels que  est une base orthonormée directe de *E*, si on note  l’angle de la rotation  du plan *P* orienté par  (c'est-à-dire par ), la matrice de *f* dans  est alors :

.



Inversement : un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est dans  (car la matrice est dans )

4ème cas : 

Selon le lemme 1, l’espace  n’est alors pas réduit à . On introduit  tel que .

Soit alors  : alors *D* est stable par *f* (car )

Donc  est aussi stable par *f*.

Donc  constitue une isométrie de *P*, sans vecteur invariant autre que .

 est donc une rotation d’angle non nul. Il existe donc une base orthonormée directe , qu’on définit de la même façon que dans le troisième cas, telle que :



Inversement, un endomorphisme admettant une telle matrice dans une base orthonormée directe est bien élément de , car la matrice est dans 



* + 1. Etude de *SO*(*E*)
       1. Proposition, définition

Soit .

On peut alors introduire :

- Une droite *D*, un vecteur unitaire  sur *D* (c'est-à-dire un axe )

- Un réel 

Tels que la matrice de *f* dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est  soit :



On dit que *f* est la rotation d’axe  et d’angle .

Démonstration :

Résulte de l’étude et du chapitre précédent avec les rotations planes.

* + - 1. Détermination du couple axe – angle
* Si  : on prend un axe quelconque, et comme angle .
* Si , on a deux couples axe – angle possibles :

 ou , où 

Détermination pratique :

(1) …

(2)  unitaire sur *D* (deux choix).

(3) choix de  tels que  soit orthonormée directe (pas nécessairement explicités)

Ainsi, la matrice de *f* dans  est .

.

Donc . Et , ou alors  ou encore  (ces deux dernières possibilités permettent de n’avoir à calculer que  si  et  ne sont pas explicités)

Figure :

Rotation d’axe  et d’angle .



Formules pour obtenir , image de  par *f*, rotation d’axe  et d’angle .

On note 

, où  et .

Comme , on a .

Et . Donc .

On a .

Détermination de  :

Supposons  (sinon, ).

On introduit alors  tel que  soit une base orthonormée de *P* orienté par , c'est-à-dire tel que  soit une base orthonormée directe de *E*. (on a alors )

Ainsi :

, où 

(La rotation plane  a pour matrice  dans )

Ainsi, comme  :



Donc :



* + 1. Tableau résumant la classification

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Dimension de l’espace des invariants | | Nature | Matrice dans une base adaptée |
|  | 3 |  | dans toute base |
| 1 | Rotation d’angle  non nul d’axe | dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est |
|  | 2 | Réflexion de plan *P* | dans une base orthonormale dont les deux premiers vecteurs sont dans *P*. |
| 0 | Composée d’une rotation d’angle  non nul d’axe  et d’une réflexion de plan orthogonal à l’axe de rotation | dans toute base orthonormée directe dont le troisième vecteur est |

* + 1. Composée de réflexions

Proposition :

La composée de deux réflexions est une rotation.

Plus précisément :

Si  et  sont deux réflexions de plans  et , alors :

* Si , alors .
* Sinon,  est une rotation d’axe porté par .

Démonstration :

-  : évident ; c’est la composée de deux isométries indirectes.

- Si ,  est une rotation autre que . De plus, les éléments de  sont invariants par  (car )

Remarque :



 est la rotation d’axe  et d’angle .

Proposition :

Toute rotation *f* est composée de deux réflexions par rapport à des plans contenant l’axe de rotation, l’une des deux réflexions pouvant être prise quelconque (mais contenant l’axe tout de même)

Démonstration :

Soit  un plan contenant l’axe *D* de *f*,  la réflexion de plan .

Alors , et  laisse les éléments de *D* invariants. Donc . Donc  est une réflexion , de plan contenant *D*.

Donc . Donc . On procède de même avec …

Conséquence :

Le groupe  est engendré par les réflexions. Plus précisément, tout élément de  peut s’écrire comme produit de 0, 1, 2 ou 3 réflexions.

* 1. Divers angles non orientés en dimension 3
* De vecteurs  :

L’angle non orienté  est le réel  tel que .

* De droites  :

L’angle non orienté  est le réel  tel que ,

Où , et 

* De plans  :

C’est l’angle non orienté des normales  aux deux plans.

C’est aussi celui de , où , , .



* D’un plan *P* avec une droite *D*.

C’est l’angle entre *D* et sa projection orthogonale sur *P*.

(définition non valable si )

C’est aussi , où 

