Rudiments de topologie   
(sur R et C)

* 1. Notion de boule ouverte, fermée

Dans C : Soit , soit . La boule ouverte de centre *a* et de rayon  est l’ensemble .

Dans R : Soit , soit . La boule ouverte de centre *a* et de rayon  est l’ensemble .

On définit aussi la boule fermée de centre *a* et de rayon  comme étant :

Dans C : 

Dans R : 

On étend la définition de boules :  et .

* 1. Notion de voisinage

Notons  (au choix)

Définition :

Soit *A* une partie de K. Soit . On dit que *A* est un voisinage de *a* lorsqu’il existe  tel que .



Sur le dessin :

*A* est un voisinage de *a*, *B* n’est pas un voisinage de *a*, mais  en est un.

*C* n’est pas un voisinage de *b*: il faut qu’une boule ouverte soit incluse dans *C*.

Propriétés :

Soit .

On note  l’ensemble des voisinages de *a*.

*  est stable par extension, c'est-à-dire :

Si , et si , alors 

*  est stable par intersection finie, c'est-à-dire :

Si , et si , alors .

Plus généralement, si , alors .

Mais ce n’est pas valable pour une infinité :  est un voisinage de 1, mais .

En effet :

Soient .

Il existe alors  tel que , et  tel que .

Alors, pour , on a 

* Séparabilité de voisinages

Soient , avec . Il existe alors ,  tels que .

Démonstration :

. On peut choisir  tel que 

Alors  et , . D’où l’existence.

* 1. Les ouverts, les fermés
     1. Les ouverts

Définition :

Soit . On dit que  est ouvert lorsque  est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire lorsque .

Exemples :

* Les boules ouvertes sont ouvertes.

Démonstration :

Pour , on a bien le résultat ( !)

Soit  une boule ouverte de centre  et de rayon .

Montrons alors que  est ouvert.

Soit .

Soit  tel que  (ce qui est possible car )

Alors . En effet, pour tout , on a :

.

Donc . Donc  est voisinage de chacun de ses points.

* K est ouvert
* Exemples d’ouverts de R :

 avec , ,  avec ,

 où .

Proposition :

Toute réunion d’ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d’ouverts est un ouvert.

Démonstration :

- Soit  une famille quelconque d’ouverts.

Montrons que  est un ouvert.

Soit . Alors il existe  tel que . Donc  est voisinage de *a*.

Comme , .

Donc  est voisinage de tous ses points. C’est donc un ouvert.

- Soient  deux ouverts.

Soit .

Donc , et . Donc .

C’est valable pour tout . Donc  est un ouvert.

* + 1. Les fermés

Soit . On dit que *F* est fermée lorsque  est ouvert.

Exemples :

 est fermé, K est fermé, les boules fermées sont fermées.

Démonstration pour les boules fermées :

Soient 

* Dans R : facile : 
* Dans K :

Soit . Soit , c'est-à-dire tel que .

Prenons alors  tel que .

Alors  :

Pour tout , , soit .

Donc  est ouvert, donc *F* est fermé.

* Les intervalles fermés de R sont fermés

Les intervalles fermés sont .

* 1. Intérieur et adhérence d’une partie
     1. Intérieur

Soit . Soit . On dit que *a* est intérieur à *A* lorsque *A* est voisinage de *a*, c'est-à-dire lorsque : .

On note  l’ensemble des points intérieurs à *A*, appelé « l’intérieur de *A* ».

Proposition :

 est un ouvert contenu dans *A*, et c’est le plus grand des ouverts contenus dans *A*, au sens de l’inclusion.

Démonstration :

* Déjà, il est évident que .
*  est ouvert :

Soit . Il existe donc  tel que .

Soit alors . Montrons que  :

 est ouverte. Elle est donc voisinage de chacun de ses points.

Or, . Donc *A* est voisinage de *y*, donc .

Ainsi, . Donc  est ouvert.

* Montrons que c’est le plus grand :

Soit  un ouvert inclus dans *A*. Montrons qu’alors .

Soit .  est ouvert, donc . Mais . Donc . Donc . D’où l’inclusion.

Exemples :

* Dans R, l’intérieur d’un intervalle  où  est .
*  : si  est un ouvert non vide, alors  est du type , avec , . Or, cet intervalle contient des irrationnels. Donc .
* L’intérieur d’une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon.
  + 1. Adhérence (dans K) d’une partie de K.

Définition :

Soient , et . On dit que *a* est adhérent à *A* lorsque tout voisinage de *a* rencontre *A*, c'est-à-dire lorsque .

La définition revient à dire que *a* est adhérent à *A* lorsque 

En effet :

Si , alors « en particulier », , puisque les boules ouvertes de centre *a* et de rayon non nul sont des voisinages de *a*.

Inversement, tout voisinage de *a* contient une boule ouverte de centre *a*.

La définition équivaut aussi à : .

On note  l’ensemble des points de *A* adhérents à *A*. On l’appelle « l’adhérence de *A* dans K ».

Proposition :

 est un fermé qui contient *A*, et c’est le plus petit des fermés contenant *A*, au sens de l’inclusion.

Démonstration :

* Déjà, , puisque .
* Soit . Montrons que  est ouvert :

Soit . Montrons que .

Déjà, , donc . Il existe donc  tel que .

Soit alors  tel que 

Alors . Notons . Alors *W’* est un ouvert, et il est inclus dans  : pour tout , on a  (car *W’* est ouvert), et de plus ce voisinage ne rencontre pas *A*, donc , c'est-à-dire que . D’où l’inclusion. Donc , donc  est ouvert, soit  est fermé.

* C’est le plus petit fermé : soit *F* un fermé contenant *A*.

Montrons qu’alors 

Soit . Montrons que .

Supposons que . Ainsi, .

Comme  est ouvert, il existe  tel que , c'est-à-dire que . Donc  (car ), ce qui contredit la définition de *x* puisque . Donc . Donc .

Exemples :

L’adhérence de  dans R avec  est .

L’adhérence dans R de Q est R.



* 1. Les suites et le vocabulaire de la topologie

Proposition :

Soit , soit . On a l’équivalence :

 converge vers *l* 

Démonstration :

 : supposons que  converge vers *l*. Soit .

Soit  tel que . Comme  converge vers *l*, il existe  tel que , , c'est-à-dire tel que 

D’où l’implication puisque ce résultat est valable pour tout .

 : supposons que 

Soit . Alors . Il existe donc  tel que , c'est-à-dire tel que .

D’où l’autre implication.

Proposition :

Définition de l’adhérence avec les suites :

Soit , et . On a les équivalences :

 il existe une suite d’éléments de *A* qui converge vers *a*.

Démonstration :

 : Soit .

Pour tout , . On peut donc choisir .

Alors  est une suite d’éléments de *A*, et :

. Donc d’après le théorème des gendarmes  tend vers *a*.

 Soit . Supposons qu’il existe  qui converge vers *a*.

Soit . Il existe alors  tel que .

Comme , on a . Comme le résultat est valable pour tout , on a bien .

* 1. Partie dense dans une autre

Soient , avec .

On dit que *A* est dense dans *B* lorsque 

Ou encore lorsque 

Ou quand tout point de *B* est limite d’une suite d’éléments de *A*.

Par exemple, Q est dense dans R.

* 1. Compléments (dans R)

Définition :

Un voisinage de , c’est une partie de R qui contient un intervalle du type , avec . De même, un voisinage de  est une partie de R qui contient un intervalle du type .

Définition :

Soit  on dit que  est adhérent à *A* lorsque tout voisinage de  rencontre *A*, c'est-à-dire lorsque , ce qui revient à dire que , où encore que *A* n’est pas majorée.

On définit de même pour .

On note  l’ensemble des points de  adhérents à *A*.

Exemple :







Remarques :

Soit , .

Alors  tend vers *l* 

 est stable par extension et par intersection finie.

De même pour .