Suites réelles

* 1. Définition
     1. Généralités

Soit *E* un ensemble.

Soit *K* un intervalle de N (du type  ou ) non vide.

Une suite d’éléments de *E* indexée par *K* est une application .

L’ensemble des suites d’éléments de *E* indexées par *K* est noté  (c’est aussi )

Dans le cas où , on parle de suites à valeurs réelles, ou suites réelles. Si , on parle alors de suites complexes.

Pour , l’ensemble des valeurs de la suite est . On dit qu’une suite est infinie si elle est indexée par un ensemble infini.  est le terme de rang *k*.

On s’intéresse dans ce chapitre à 

* + 1. Opérations sur les suites réelles

Soient , .

 désigne la suite réelle *w* définie par :



 désigne la suite réelle *h* définie par :



 désigne la suite réelle *u*’ définie par :

.

"." : loi de composition à opérateur externe : .

 désigne la suite réelle dont tous les termes sont nuls : . (de même,  ou 1 si il n’y a pas d’ambiguïté.)

Remarque :

Il n’y a pas intégrité, c'est-à-dire :



Par exemple :



Alors , mais  et .

* + 1. Divers modes de définition de suites
* Définition explicite ; donnée, pour chaque , de  en fonction de *n* (de façon plus ou moins complexe, avec éventuellement des sommes ou des conditions…)
* Définition récurrente :
  + récurrence « simple » :  est telle que :



(Problème de définition éventuelle, dépend de *f*. On peut résoudre ce problème par récurrence)

* + récurrence « double » :



* Définition implicite. Par exemple : « pour ,  est la solution réelle positive de l’équation  ».

On peut aussi imaginer d’autres modes de définitions de suites, plus complexes…

* + 1. Suite croissante, décroissante…

Soit  une suite réelle.

Définition, proposition :



Démonstration :

* + Supposons que . Soit . Comme , on a bien 
  + Supposons que . Soient . Si , on a . Si , alors  (idem si )









* + 1. Suite majorée, minorée…

Soit 







* + 1. Propriétés « à partir d’un certain rang »

Soit 

Exemple : *u* est croissante à partir du rang 4 si et seulement si .

On définit de même pour les autres propriétés.

Une suite constante à partir d’un certain rang est dite stationnaire.

* + 1. Suite extraite

Définition :

Soit , .

On dit que *v* est extraite de *u* lorsqu’il existe une application  strictement croissante telle que .

Exemple :

Soit *u* la suite définie par . Alors les suites suivantes en sont extraites :

* + La suite  est constante et égale à 1.
  + La suite  est constante égale à -1.
  + La suite  où  qui à 0 associe 0 et à  associe le *n*-ième nombre premier est stationnaire à partir du rang 2.
  + La suite  est égale à la suite *u*.
  1. Suites convergentes
     1. Définition

Soit . On dit que la suite  est convergente lorsqu’il existe  tel que 

Remarque :



« Aussi petit que soit  strictement positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite  sont dans l’intervalle  ».

Théorème :

Soit , 

Si  converge vers *l* et *l*’, alors .

Démonstration : par l’absurde.

Supposons , par exemple .

Soit  tel que  (ce qui est possible car )

Alors :



et 

Si on prend , on aura alors :

 et 

Donc  ;  ; . Contradiction avec le choix de 

Conséquence :

Si  converge, l’unique réel *l* tel que  est appelé la limite de la suite .

On note , ou  (attention aux notations : dans les deux premières égalités, on a des suites en argument, dans la troisième, on a un terme).

Pour dire « la suite  converge », on peut dire aussi «  admet une limite réelle ».

Exemples de base :

* Soit *a* un réel. La suite constante égale à *a* converge vers *a*.

En effet : Soit . Alors ,  puisque . On a donc trouvé *N* (à savoir 0) tel que .

Donc 

* La suite  converge vers 0.

Démonstration :

Soit . Soit  tel que . Alors, pour tout , on a :

, or, donc . Donc la suite converge vers 0.

Proposition :

Soit  et . On a les équivalences :



En effet :



Exemple :

La suite  converge vers 2.

* + 1. Convergence et suite bornée

Théorème :

Si une suite  converge, alors elle est bornée.

Démonstration :

Supposons que  converge. Notons *l* sa limite.

Selon la définition de la convergence vers *l*, il existe  tel que , . Donc , .

Ainsi, en posant , il est clair que .

Contraposée :

Si  n’est pas bornée, alors elle ne converge pas (elle diverge).

Attention, la réciproque est fausse :

 est bornée, mais ne converge pas.

En effet :

Soit . Montrons que  ne converge pas vers *l*.

Prenons . Alors il n’existe aucun *N* tel que , .

En effet, supposons qu’il en existe.

Alors  et .

Donc .

Contradiction car .

* + 1. « La notion de limite ne dépend pas des premiers termes »

Proposition :

Soit . Si *u* et *v* sont égales à partir d’un certain rang, alors elles sont de même nature (convergente ou divergente), et si elles convergent, c’est vers la même limite.

Démonstration :

Soit  tel que . Supposons que  converge vers une limite .

Alors  converge aussi vers *l*:

Soit . On peut introduire  tel que .

Alors, si on pose , on a .

Donc . Donc  converge vers *l*.

Etant donnés les rôles symétriques joués par  et , on a donc l’équivalence  converge  converge ; donc, par contraposée,  diverge  diverge.

* + 1. Convergence et suite extraite

Lemme :

Soit  une application strictement croissante de N dans N.

Alors 

Démonstration par récurrence :

 car 

Soit , supposons que .

Alors  ;  ; .

Théorème :

Si une suite  converge vers , alors toute suite extraite converge vers *l*.

Démonstration :

Supposons que  converge vers *l*.

Soit  une suite extraite de .

Soit , strictement croissante, telle que .

Soit .

Comme  converge vers *l*, il existe  tel que .

Alors pour tout , on a , donc .

Ainsi, on a montré que 

Application :

Généralement pour la contraposée.

* Soit  la suite de terme général .

 donc  diverge.

* Soit  la suite de terme général 

 donc  diverge.

Proposition :

Si  et  convergent vers la même limite *l*, alors  converge aussi vers *l*.

Démonstration :

Soit 

Soit  tel que 

Soit  tel que .

Alors .

En effet : soit .

Si *n* est pair, *n* s’écrit sous la forme , et comme , on a , donc , soit, comme , . Il en est de même si *n* est impair.

Donc 

* 1. Convergence et inégalités

Proposition :

Si  converge vers *l* et si *I* est un intervalle ouvert contenant *l*, alors il existe un rang à partir duquel les termes sont dans *I*.

Démonstration :

Il est clair que si *I* est ouvert, et si , on peut trouver  tel que . Soit alors un tel . Il existe donc  tel que , c'est-à-dire 

Théorème (passage à la limite dans une inégalité) :

Si deux suites ,  convergent vers *l*, *l*’ respectivement, et si il existe  tel que , alors .

Démonstration par l’absurde :

Avec les hypothèses du théorème, supposons que .

Soit alors  tel que . Ainsi, 

Il existe donc  tel que 

Et aussi  tel que 

Alors, pour  :

. Contradiction, car .

Remarque :

Les inégalités strictes ne se conservent pas par passage à la limite.

Par exemple : , mais 

Cas particulier :

Si  a une limite, et si , alors 

Théorème (des gendarmes) :

Soient .

Si  et  convergent vers une même limite , et si il existe  tel que , alors  converge vers *l*.

Démonstration :

Soit .

Il existe donc  tel que .

Et aussi  tel que 

Alors, pour , on a 

On a donc trouvé *M* tel que .

Donc 

Cas particulier :

Si  converge vers 0, et si , , alors  converge vers 0.

Plus généralement, si  converge vers 0, et si , , alors  converge vers *l*.

* 1. Convergence et opérations sur les suites

Proposition :

Si une suite  converge vers , alors  converge vers .

Démonstration :

Pour tout , . Donc, d’après le théorème des gendarmes,  converge vers .

(Attention, la réciproque est fausse, sauf si )

Proposition :

Soient , .

Si  converge vers ,  vers , alors :

 converge vers 

 converge vers 

 converge vers 

Démonstration :

* Soit .

Il existe donc  tel que  (car )

Et  tel que .

Alors, pour , 

Donc .

Donc  converge vers .

* 1er cas : 

Soit .

Il existe donc  tel que  (car )

Alors, pour tout , on a : 

2ème cas :  : trivial, la suite nulle converge vers 0.

* La suite  converge, elle est donc bornée.

On introduit alors  tel que 

On a alors, pour tout  :



Donc, d’après le théorème des gendarmes,  converge vers .

Proposition :

Si  est bornée, et si , alors .

En effet, on a :  (voir démonstration précédente)

Proposition :

Si une suite  converge vers , alors  est définie à partir d’un certain rang et converge vers .

Démonstration :

 converge vers *l*. Donc  converge vers .

Soit alors  tel que . Il existe donc  tel que , .

Donc  est définie au moins à partir de *P*.

Montrons que 

Pour tout , on a : .

Donc d’après le théorème des gendarmes,  converge vers .

Proposition (démontrée plus tard) :

Soit  à valeurs dans *I*. Supposons que  converge vers .

Si *f* est une fonction continue définie sur *I*, alors 

* 1. Limites dans 

On note 

On prolonge la loi + et la relation  sur  de la façon suivante :





(Prolongation partielle)





(Prolongation totale)

Remarque :

 admet un maximum () et un minimum ().

Définition :

Soit 

 tend vers  lorsque 

 tend vers  lorsque 

« étant donné n’importe quel réel, il y a un rang à partir duquel on le dépasse »

Proposition :

Si une suite  a une limite dans , alors elle n’en a qu’une.

Démonstration :

On suppose que  tend vers , avec 

1er cas : , déjà vu.

2ème cas : , .

Il existe  tel que 

Soit  tel que .

Il existe  tel que 

Contradiction lorsque 

Autres cas (, ou , ) : procéder de même que pour le 2ème cas.



Proposition :

Si , alors  n’est pas majorée.

Si , alors  n’est pas minorée.

Proposition :

Si , alors toute suite extraite de  tend vers 

(même démonstration que pour *l*)

Ainsi, si , alors toute suite extraite tend aussi vers *l*.

Proposition :

Si , alors  à partir d’un certain rang

(prendre  dans la définition)

Proposition :

Si ,  et si , alors .

Théorème :

Si , et si , alors 

Si , et si , alors 

Proposition :

Si , alors 

Si , et si , alors 

Proposition :

Si  et si  est minorée, alors 

Démonstration :

Soit  tel que 

Alors 

Soit . Comme , il existe  tel que 

Alors 

Proposition :

Si  et si il existe  tel que, à partir d’un certain rang, , alors 

La démonstration est identique à celle de la proposition précédente.

Proposition :

Si , alors  est définie à partir d’un certain rang et tend vers 0.

Si  et si  à partir d’un certain rang, alors  est définie à partir de ce rang et tend vers .

* 1. Suite arithmétique – géométrique
     1. Suite arithmétique

Soit  une suite arithmétique de raison .

Alors :





Si , 

Si ,  est strictement croissante et tend vers .

Si ,  est strictement décroissante et tend vers 

* + 1. Suite géométrique

Soit  une suite géométrique de raison .

Alors :





Si ,  est nulle à partir du rang 1.

Si ,  est constante.

Pour , étude de la suite géométrique de terme général  ()

* Si ,  est strictement croissante
* Si ,  est strictement décroissante
* Si ,  n’est pas monotone.

Démonstration :

Pour les deux premiers : 

Pour le troisième : 

Pour les limites :

* Si ,  tend vers 
* Si ,  tend vers 0.
* Si , pas de limite.

En effet : pour ,  et  tend vers , donc  tend vers .

Pour  et , . Donc , soit .

* 1. Comparaison de suites
     1. Suite négligeable devant une autre

Définition :

 est négligeable devant  quand *n* tend vers  lorsqu’il existe une suite  qui tend vers 0 telle que  à partir d’un certain rang.

On note alors 

Exemple :

 puisque , 

Définition équivalente dans un cas courant :

Si la suite *v* ne s’annule pas à partir d’un certain rang, alors on a l’équivalence :

 tend vers 0.

Ou encore :



Démonstration : si *v* ne s’annule pas à partir du rang *q*.

Supposons que . Il existe alors  et  tel que .

Alors 

Supposons que . Alors, . Donc 

Proposition :

La relation  définie sur  est transitive, compatible avec la multiplication, mais pas avec l’addition.

En effet :

* Si  et , alors  à partir d’un certain rang, et  à partir d’un certain rang. Alors, à partir du plus grand des deux rangs, . Donc .
* Si  et , alors  à partir d’un certain rang, et  à partir d’un certain rang. Donc . Donc 
* Contre-exemple pour l’addition :

, mais  : 

Cependant, si  et , alors .

En effet :

,  à partir d’un certain rang, donc …

* + 1. Comparaisons classiques

Pour les suites qui tendent vers  :



Plus généralement,  (exemple : )

En effet :

Soient . Alors :



 lorsque 

 lorsque 

Démonstration :

, où 

 si .

Soit . Donc , soit 

Plus généralement, 

En effet :

. Or, . Donc . Comme , on a bien 

 si 



En effet :

.

Si on prend , on a, pour tout  : .

Donc 



En effet : 

Notation :

Pour dire qu’une suite *u* est négligeable devant une autre suite *v*, on note :

 («  égale une suite négligeable devant  »)

Ainsi,  désigne une suite négligeable devant .

* + 1. Suites équivalentes

Définition :

 il existe une suite  qui tend vers 1 telle que  à partir d’un certain rang.

Définition simplifiée :

Si  ne s’annule pas à partir d’un certain rang, alors 

Exemple :



Autre définition :

 au voisinage de .

Démonstration :

* Si , alors  à partir d’un certain rang, où . Mais , où . D’où .
* Inversement : identique.

Proposition :

La relation ~ est transitive, réflexive, antisymétrique.

Démonstration de la symétrie (les deux autres étant immédiats) :

Si , alors  à partir d’un certain rang, où . Mais alors  à partir d’un certain rang, et , donc .

Une relation transitive, réflexive, symétrique est une relation d’équivalence.

Une relation transitive, réflexive, antisymétrique est une relation d’ordre.

La relation ~ est compatible avec , mais pas avec + ; la démonstration est la même que pour <<.

 mais .

Remarque :

 à partir d’un certain rang  est stationnaire en 0.

Proposition :

* Si , et si , alors 

En effet,  à partir d’un certain rang.

* La réciproque est fausse, sauf si 

Démonstration :

Si , alors . Par transitivité, si , alors .

Contre-exemples si  : , .

Divers vrai/faux classiques :

* Si , alors  (compatibilité avec ) 🡪 vrai
* Si , alors  () 🡪 vrai
* Si , alors  (si défini) 🡪 vrai.
* Si , alors  est fausse en général (, et )
* Si , alors  est fausse en général.
  + 1. Equivalents usuels

Si , alors :



* + 1. Suite dominée par une autre

On dit que  est dominée par  lorsqu’il existe une suite bornée  telle que  à partir d’un certain rang.

Cela revient à dire :

 est dominée par  il existe  tel que  à partir d’un certain rang.

Lorsque  est dominée par , on note 

Exemple :



* 1. Théorèmes portant sur les suites monotones
     1. Le théorème « de la limite monotone » (pour les suites)

Théorème 1 :

Soit  une suite croissante de réels.

- Si  est majorée, alors  converge vers 

- Si  n’est pas majorée, alors  tend vers .

Ainsi, dans les deux cas,  a une limite dans .

Démonstration :

Soit  une suite croissante.

* Supposons  majorée, c'est-à-dire que  est majorée.

Cet ensemble est une partie non vide et majorée de R. Il admet donc une borne supérieure . Montrons alors que  converge vers *l*.

Soit . Alors  ne majore pas  (puisque *l* est le plus petit majorant) Il existe donc  tel que . Ainsi, comme  est croissante, on a : , .

D’où la convergence de  vers *l*.

* Supposons  non majorée. Montrons que  tend vers .

Soit . *A* n’est pas un majorant de . Il existe donc  tel que . Donc, comme  est croissante, , .

Donc  tend vers .

Théorème 2 :

Soit  une suite décroissante.

- Si  est minorée, alors elle tend vers sa borne inférieure.

- Si  n’est pas minorée, alors elle tend vers .

Ainsi, dans les deux cas,  a une limite dans .

Démonstration :

Soit  une suite décroissante.

1. Appliquer le théorème précédent à 
2. Recopier la démonstration précédente en adaptant.
   * 1. Suites adjacentes

Théorème :

Soient deux suites réelles  et .

Si  est croissante, si  est décroissante et si  tend vers 0, alors elles convergent vers une même limite.

Vocabulaire :



Démonstration :

Supposons  et  adjacentes.

* Déjà, pour tout , .

En effet, s’il existe  tel que , alors, pour tout  :

 (car  est croissante et  décroissante)

Soit , et  donc .

C'est-à-dire : 

D’où, par passage à la limite lorsque *n* tend vers , .

Ce qui est contradictoire puisqu’on a supposé 

Donc 

* Il en résulte que pour tout , .

Donc  est croissante et majorée. Elle converge donc vers .

De même,  converge vers .

Comme , et , on a donc , c'est-à-dire . Donc  et  tendent vars la même limite.

Exemple :

Pour tout , posons :



Et 

-  est croissante, car pour tout , .

- Pour tout , 

Donc  est décroissante à partir du rang 1.

- 

Donc  et  sont adjacentes, donc convergent vers une même limite *e*.

Montrons que  et que .

- Déjà, , et .

Donc en passant à la limite .

- Supposons que , avec . Alors, comme  est strictement croissante et  est strictement décroissante et tendent vers *e*, on a :

, .

C'est-à-dire, pour tout , 

Donc, pour  (on peut s’arranger pour que  puisque la fraction n’est pas nécessairement irréductible) :

, où *a* est un entier naturel.

C'est-à-dire , ce qui est impossible car .

Donc .

* + 1. Théorème des « segments emboîtés »

Théorème :

Soit  une suite décroissante (au sens de l’inclusion) de segments emboîtés de R. Alors  n’est pas vide, et si, de plus, l’amplitude de  tend vers 0 lorsque *n* tend vers , alors  est un singleton.

Démonstration :

* Soient ,  les deux suites réelles telles que :



* Comme les  sont emboîtés, on a .

C'est-à-dire : .

Ainsi,  est croissante, et  est décroissante.

De plus,  est majorée (par ), et  est minorée (par ).

Donc  converge vers , et  vers .

Donc . Donc . Donc 

* Si de plus l’amplitude de  tend vers 0, alors , donc 

Donc . Mais on a aussi . En effet :

Soit .

Alors . D’où, par passage à la limite, .

Donc, comme , . D’où l’inclusion. Donc .

* + 1. Un exemple très important : les suites construites par dichotomie

Soient ,  deux suites réelles telles que :



Alors :

.

 est croissante,  est décroissante.

.

Ainsi,  et  sont adjacentes, et convergent vers la même limite.

Démonstration :

- Montrons par récurrence que .

C’est vrai pour .

Soit , supposons que .

Alors .

Or, .

Donc , ou . Soit, dans les deux cas, , ce qui achève la récurrence.

- Soit . On a montré que .

Donc . Or, .

Donc , ce qui est valable pour tout *n*.

Donc  est croissante et  est décroissante.

- Soit . Alors .

Donc  est géométrique de raison .

Donc .

* 1. Le théorème de Bolzano–Weierstrass

Théorème :

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration :

Soit  une suite réelle bornée.

On introduit alors , avec , tels que pour tout , .

* On commence par construire deux suites ,  telles que :
* ,  convergent vers la même limite.
* Pour tout , l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini.

Pour cela, on procède par dichotomie :

- On prend , . L’ensemble des entiers *n* tels que  est infini, puisque c’est N.

- En supposant  et  de sorte que  et que l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini, on construit  et  de la manière suivante :

* + - * + Si l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini, on pose  et .
        + Sinon, l’ensemble des entiers *n* tels que  est nécessairement infini, et on pose alors  et .

On a bien alors , et l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini

La construction dichotomique de  et  assure de plus que ces deux suites convergent vers la même limite.

* On construit une suite strictement croissante  d’entiers naturels de sorte que, pour tout , .

Pour cela, on fait la construction récurrente suivante :

- On prend  tel que  : il en existe puisque l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini.

- En supposant  construit : comme l’ensemble des entiers *n* tels que  est infini, il contient nécessairement des entiers strictement plus grands que  ; on peut donc trouver  tel que 

* Conclusion :

La suite  est une suite extraite de  (puisque  est une application strictement croissante de N dans N), et elle converge :

En effet, on a, pour tout , . Or,  et  convergent vers une même limite, donc  aussi d’après le théorème des gendarmes.

* 1. Compléments

Proposition :

Tout réel est limite d’une suite de rationnels.

Démonstration :

Soit .

Pour tout , on peut introduire un rationnel  tel que .

Donc la suite  converge vers *a*.

Idées pour les suites définies par des relations de récurrence du type  :

* Intérêt d’un « intervalle stable par *f* ».
* Intérêt du graphe de *f*.
* Intérêt des points fixes de *f*.
* Intérêt du signe de 
* Intérêt de la croissance de *f* sur un intervalle stable contenant  : la suite est monotone.
* Intérêt de la décroissance de *f* sur un intervalle contenant  :  et  sont monotones de sens contraire.
* Intérêt de majorations du type .

Développement décimal illimité propre d’un réel :

Pour tout , notons 

Proposition :

Soient , .

Alors il existe un unique décimal  tel que .

On l’appelle la valeur décimale approchée par défaut d’ordre *n* de *x*.

Démonstration :

Pour tout , on a les équivalences :



D’où l’existence et l’unicité de  tel que , .

Remarques :

-  est la partie entière de *x*.

- On a, pour tout , , donc  converge vers *x*.

Proposition :

Avec les notations précédentes, on note, pour tout , .

Alors :



Démonstration :

Soit .

Déjà,  est un entier (puisque  et  le sont)

De plus, on a : , et .

Donc , soit , d’où .

De plus, .

(On peut montrer de plus par l’absurde que  n’est pas stationnaire à 9)